★최신 모의고사 최다 수록

차 례

[동영상 강의 QR 코드 수록: 최신 3개년 기출 전 문항]

★ **연습용 OMR 카드**는 해설편 379쪽에 있습니다.

[집필진]

김덕환 대전 대성여고 교사
김대식 경기 하남고 교사
민경도 서울 강남 종로학원 강사
박소희 안양 안양외고 교사
박숙녀 아산 충남삼성고 교사
배수나 서울 가인아카데미 강사
신건률 대치 오름학원 강사
신명선 안양 신성고 교사
신현준 안양 신성고 교사
윤장노 안양 신성고 교사
윤혜미 서울 세종과학고 교사
이종석 일등급 수학 저자
이창희 서울 THE 다원수학 이사
위경아 서울 강남대성기숙의대관 강사
장광걸 김포 김포외고 교사
장경호 오산 운천고 교사
장영환 제주 제로링수학교실 강사
장철희 서울 보성고 교사
전경준 서울 풍문고 교사
조승원 수원 경기과학고 교사
지강현 안양 신성고 교사
홍지언 부산 피보나치 수학 강사
홍지우 안양 평촌고 교사
황광희 경기 시흥고 교사
수경 수학 콘텐츠 연구소

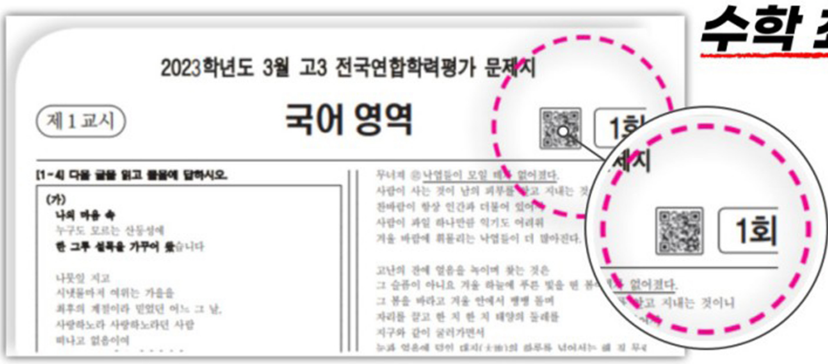
개념&문제 풀이 강의 선생님 유튜브 채널
'셀프수학'

[감수진]

강마루 이천 이강학원
강명식 수원 매쓰온수학학원
강수민 부산 강하이수학학원
강은녕 서울 탑수학학원
김경자 대전 펜타뷰수학
김대한 인천 학산학원
김도연 구미 그릿수학학원
김리안 인천 수리안학원
김미정 대구 일등수학학원
김민영 군포 상승수학
김민정 창원 스키마수학
김복현 부천 시온고
김봉조 울산 퍼스트클래스 수학영어전문학원
김성환 밀양 밀양고
김수영 대구 봉덕김쌤수학학원
김수진 광주 영재사관학원
김연주 서울 목동쌤올림수학학원
김용형 세종 QE영어수학학원
김정구 인천 3030영수학원
김정섭 서울 로고스학원
김정식 용인 게이트학원
김주현 광주 현스카이학원
김주희 인천 탑엘리트영수학원
김 준 인천 쭌에듀학원
김지송 서울 잠신고
김지현 수원 엠코드수학학원
김태성 광주 김태성수학
김해성 거제 AHHA수학
문정연 광주 풍암의 정석
문정탁 대구 STM수학학원
박경문 전주 해성중
박규진 김포 하이스트 학원
박영언 의정부 멘토학원
박지현 대구 하이클래스수학
백석인 서울 연세학원
백태민 대구 학문당입시학원
변지영 대구 수학을 찾는 사람들
서동원 대전 수학의 중심 학원
손형래 합천 남명학습관
손흥규 고양 꿀수학교습소
심동주 안동 아르베수학전문학원
안대호 김포 독강수학학원
안재현 부산 현수학교습소
안 혁 울산 혁신수학
양우석 서울 강의하는 아이들
양윤석 용인 태성고
양지현 성남 일비충천수학학원
어성웅 수원 어쌤수학학원
엄보용 안산 경안고
유슬기 창원 르네수학교습소
윤희용 부천 매트릭스학원
이경환 대구 학문당입시학원
이민규 인천 투스카이수학학원
이선경 대구 아르케수학학원
이세복 서울 일타수학학원
이승재 대구 척수학교습소
이승훈 인천 일품수학과학전문학원
이원영 일산 FM 수학전문학원
이윤경 서울 윤수학학원
이정섭 서울 은지호영감수학
이주연 울산 반석성균관학원
이준석 서울 이가수학학원
이철호 군포 파스칼수학학원
이태권 대구 보담학원
이한빛 고양 한빛수학학원
이화정 안양 마타수학
임안철 안양 에이엠수학학원
임태형 군포 생각하는 방법
장시은 용인 자이언트에듀학원
장용준 의정부 상우고
전승환 안양 공즐학원
전지혜 세종 뉴웨이브수학
정중연 부천 정중수학학원
정휘수 부산 제이매쓰수학방
조성철 부천 매트릭스수학학원
차동희 용인 수학전문공감학원
최지영 용인 매쓰플랜
최현성 대전 충남고
한승효 진주 보람과학씨투엠수학영재학원
함정훈 압구정 함수학
현승평 화성 화성고
홍재화 서울 티다른수학교습소
황화연 전주 근영여고

2025 수능대비 자이스토리 연도별 모의고사

국어 독서·언어(문법)
영어 독해 전 문항
수학 최신 문항

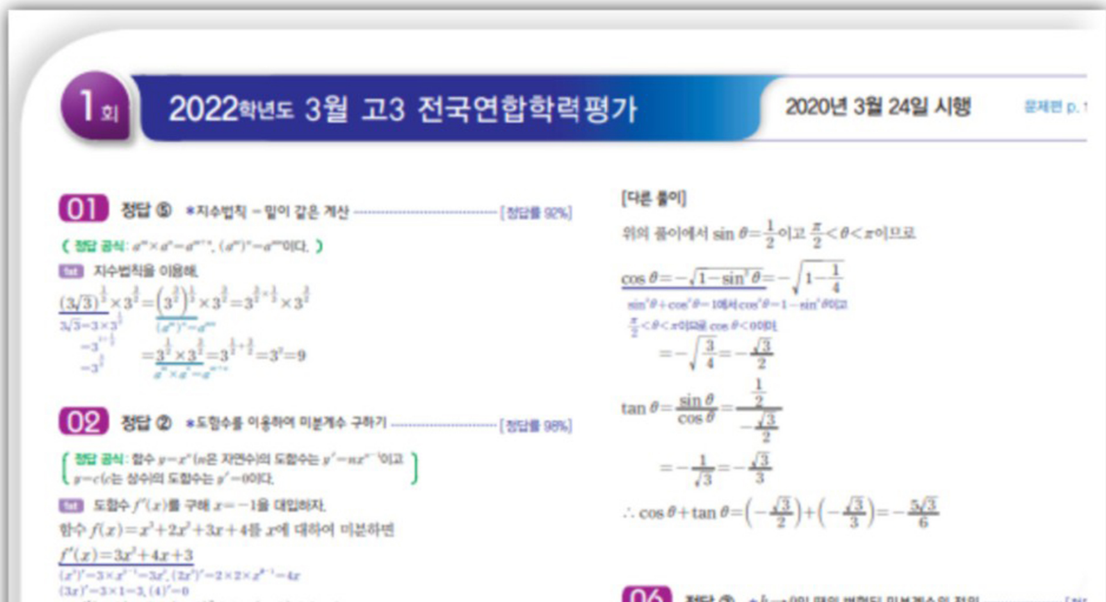


동영상
강의
QR코드

정답 마킹까지 훈련하는 실전 연습용 OMR 카드

2025 수능대비 자이스토리 연도별 모의고사

다시는 안 틀리게 하는 입체 첨삭 해설



2023학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수학 영역

▲ 수학 동영상 강의

1회

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8} \times \dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_5=4,\ a_7=4a_6-16$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3-ax+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

수학 영역

5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$ 이고 $\sin(\pi+\theta)>0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

6. 함수

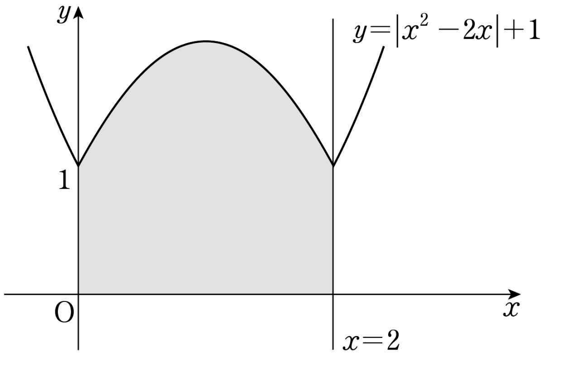
$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



8. 두 점 $\mathrm{A}(m, m+3)$, $\mathrm{B}(m+3, m-3)$ 에 대하여 선분 AB를 $2:1$ 로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m 의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? (단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

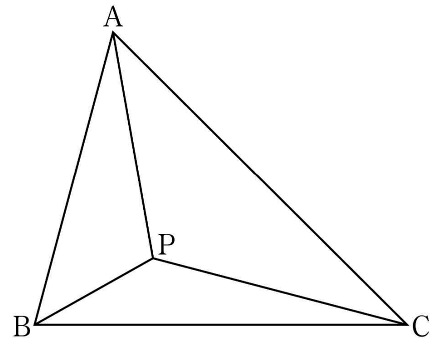
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $\lvert a_4\rvert+\lvert a_6\rvert=8$
(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

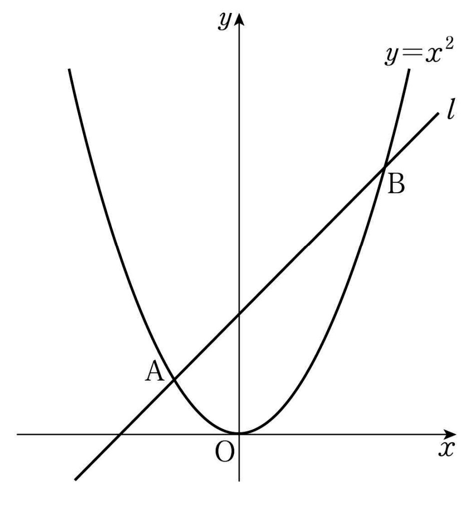
11. 그림과 같이 $\angle BAC=60°$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC=30°$, $\angle PCB=15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

12. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



13. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
(나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\dfrac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

단답형

16. $\log_2 96-\dfrac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\ \ v_2(t)=-3t^2+9t$$

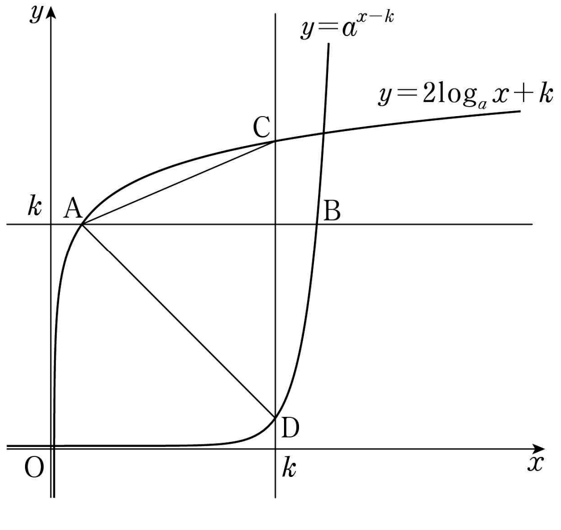
이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)=0$
>
> (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \ge 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{t\to 4+}h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

1회

5지선다형

23. ${}_{3}\mathrm{P}_{2}+{}_{3}\Pi_{2}$의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

24. 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

25. 문자 A, A, A, B, B, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝 모두에 B가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

26. 서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

정답 및 해설 p.11

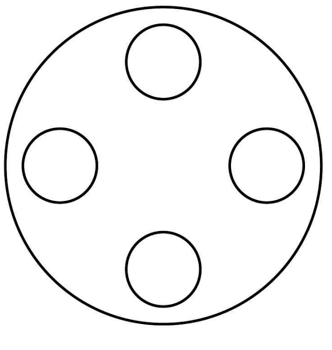
27. 방정식 $a+b+c+3d=10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

28. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다. (나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540



단답형

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다. (나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다. (나) $f(2) \neq 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

*** 확인 사항** ○ **답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.** ○ **이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.**

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

1회

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n-2^n < a_n < 3^n+2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

수학 영역(미적분)

27. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54 ② $-\frac{75}{2}$ ③ -24 ④ $-\frac{27}{2}$ ⑤ -6

28. $a>0$, $a\neq1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

단답형

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

30. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

*** 확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수학 영역(기하)

1회

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ 8

24. 포물선 $x^2=8y$의 초점과 준선 사이의 거리는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

25. 한 초점이 $\mathrm{F}(3, 0)$이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것을 l이라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

26. 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 포물선과 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

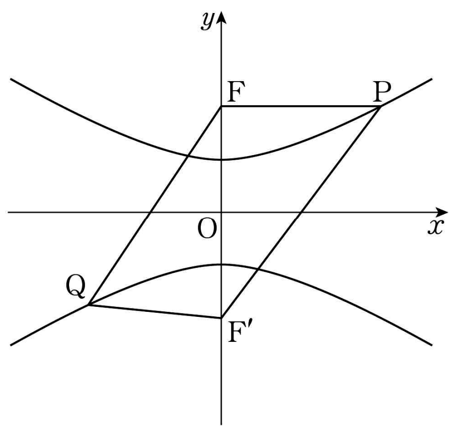
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답 및 해설 p.16~17

27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F'}(0, -c)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$이 있다. 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 쌍곡선 위의 제3사분면에 있는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=5,\ \overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$$

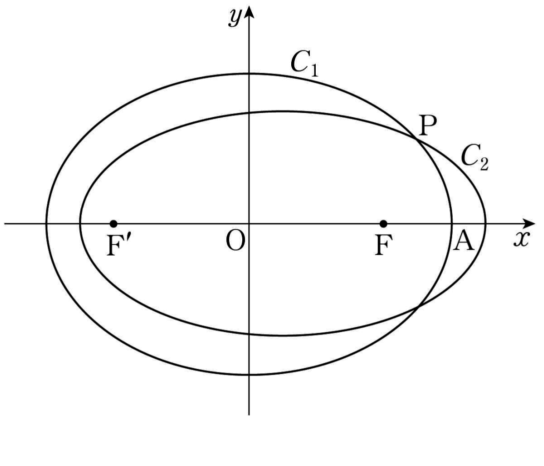
를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$의 값은? [3점]



① 10 ② $\frac{35}{3}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ 15 ⑤ $\frac{50}{3}$

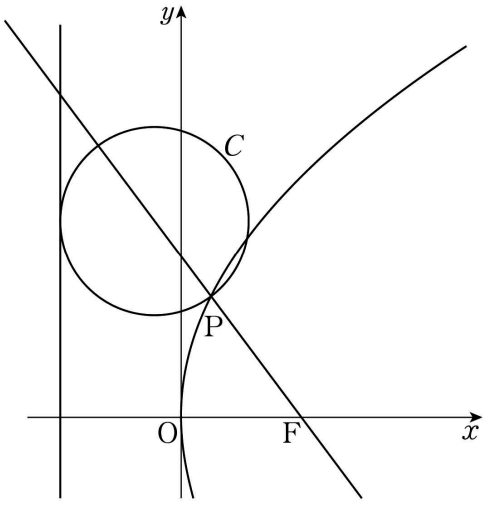
28. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\cos(\angle\mathrm{AFP})=\frac{3}{8}$일 때, 삼각형 PFA의 둘레의 길이는? [4점]

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



단답형

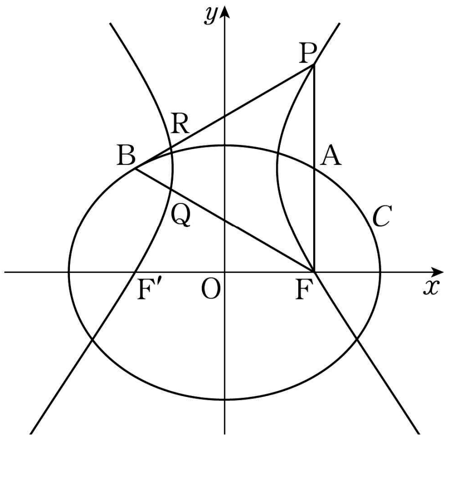
29. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 직선 FP 위의 점을 중심으로 하는 원 C가 점 P를 지나고, 포물선의 준선에 접한다. 원 C의 반지름의 길이가 3일 때, $25p$의 값을 구하시오. (단, 원 C의 중심의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.) [4점]



30. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자.
두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자. 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
(나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.

$60\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오. [4점]



＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

5지선다형

1. $(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

2. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

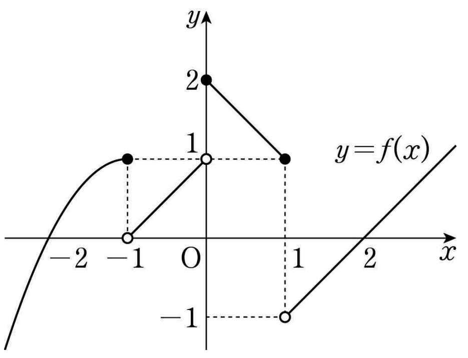
3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4=6, \quad 2a_7=a_{19}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① −2　② −1　③ 0　④ 1　⑤ 2

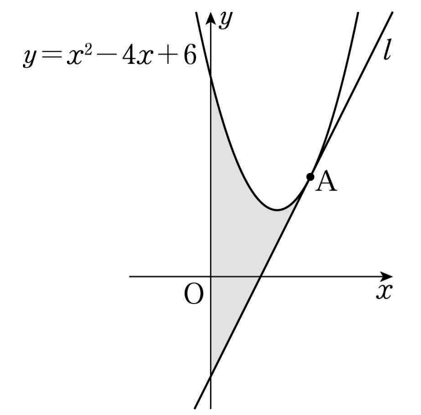
5. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

6. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

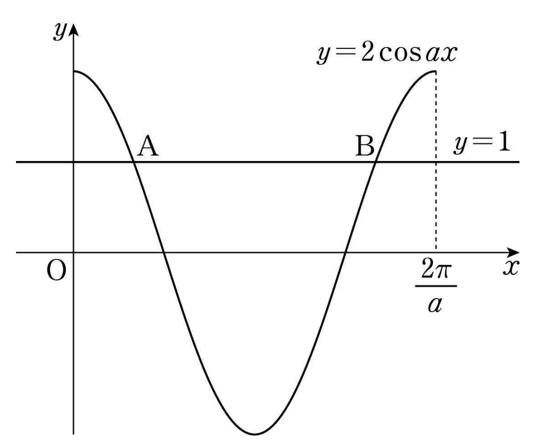
① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

8. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\le x\le\frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

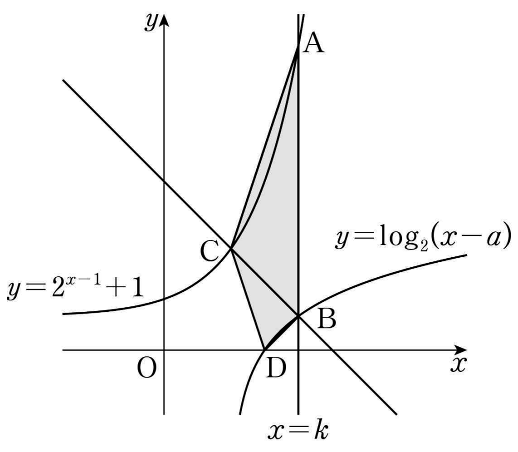
10. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

12. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \leq 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

(가) $x \neq 1$, $x \neq a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.
(나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

13. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$　② $\frac{33}{5}$　③ 7　④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{39}{5}$

14. 두 함수

$$f(x) = x^3 - kx + 6, \quad g(x) = 2x^2 - 2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

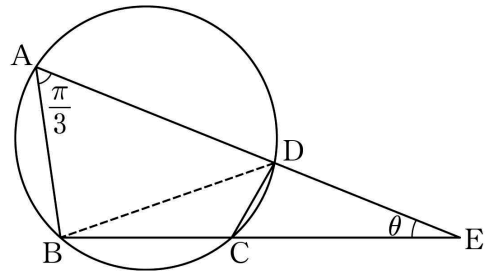
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수가 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
> $\overline{CD}=$ (가)
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
> $\overline{ED}=$ (나)
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다)
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

단답형

16. $\dfrac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. $\displaystyle\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

18. 부등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}<\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{k-1})$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

정답 및 해설 p.22~23

19. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3-12x^2+k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

20. 수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

21. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a \times b$의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$) [4점]

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

2회

5지선다형

23. ${}_{3}\Pi_{4}$의 값은? [2점]

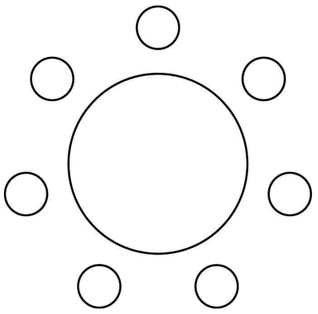
① 63 ② 69 ③ 75 ④ 81 ⑤ 87

24. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

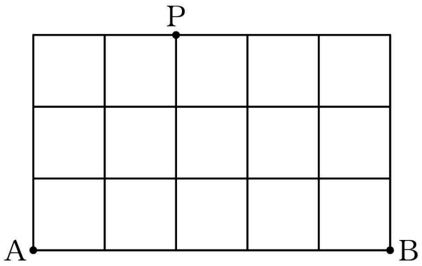
① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

25. A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480



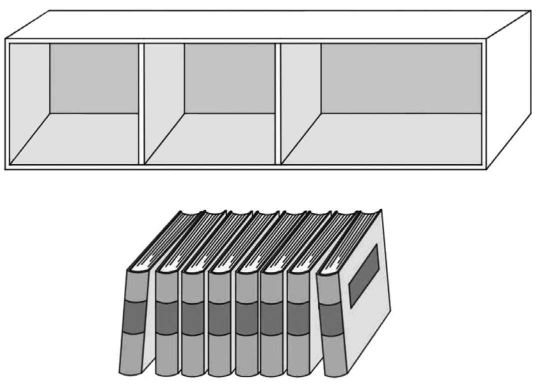
26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.) [3점]



① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

정답 및 해설 p.25

27. 그림과 같이 같은 종류의 책 8권과 이 책을 각 칸에 최대 5권, 5권, 8권을 꽂을 수 있는 3개의 칸으로 이루어진 책장이 있다. 이 책 8권을 책장에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는? (단, 비어 있는 칸이 있을 수 있다.) [3점]



① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다. (나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

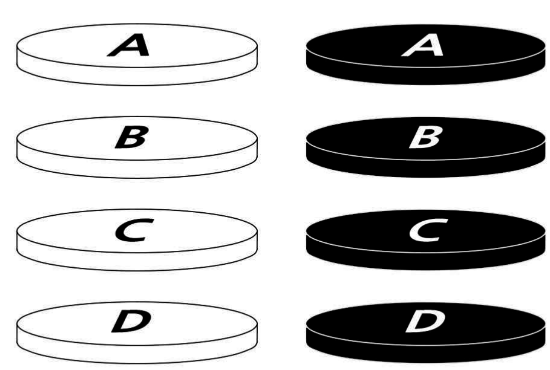
단답형

29. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$ (나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

30. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다. (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

2회

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

24. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$ 를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

26. 첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

정답 및 해설 p.26~27

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n{}^2 < 4na_n + n - 4n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

28. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) A_1은 원점이다.
> (나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
> (다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ 일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

단답형

29. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

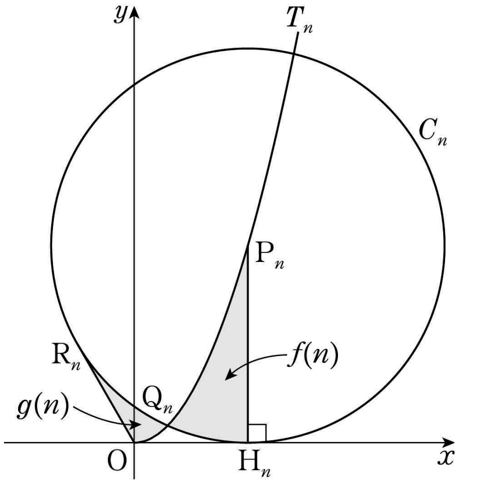
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\ (x\ge 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.
중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.
점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]



*** 확인 사항**

○ **답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.**

5지선다형

23. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

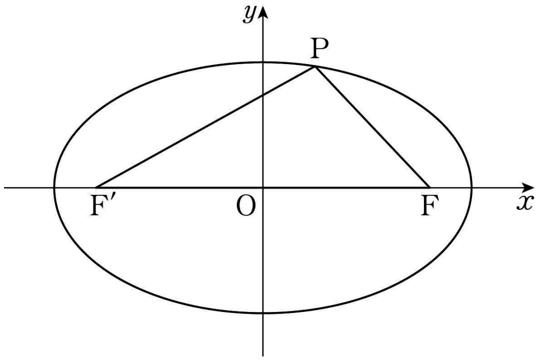
24. 두 초점의 좌표가 (0, 3), (0, −3)인 타원이 y축과 점 (0, 7)에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

25. 쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

26. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]



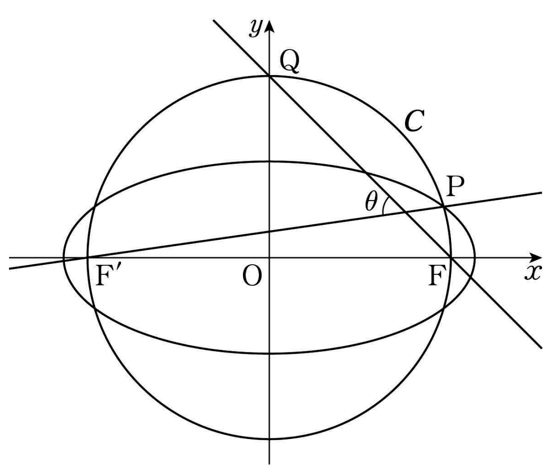
① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬때, 상수 p의 값은? [3점]

> (가) 점 Q는 선분 FH를 $1:2$로 내분한다.
> (나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

28. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F′P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$일 때, $\dfrac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, a, b는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]



① $\dfrac{11}{64}$ ② $\dfrac{3}{16}$ ③ $\dfrac{13}{64}$ ④ $\dfrac{7}{32}$ ⑤ $\dfrac{15}{64}$

단답형

29. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

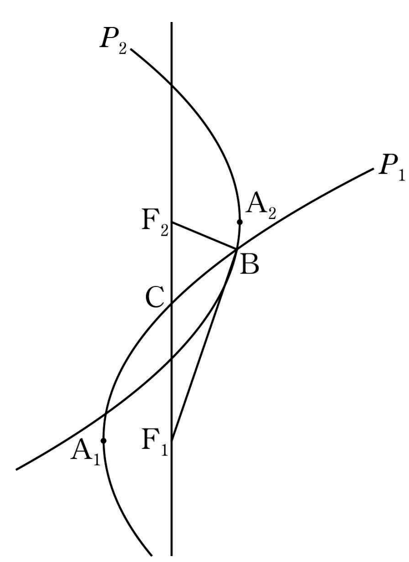
> (가) $\overline{AF}<\overline{AF'}$
> (나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F′을 지난다.

선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF′과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 F_1F_2와 평행하고, 두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치한다.
두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 F_1F_2와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{A_1C}=5\sqrt{5}$
> (나) $\overline{F_1B}-\overline{F_2B}=\dfrac{48}{5}$

삼각형 BF_2F_1의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오. (단, $\angle F_1F_2B<90°$) [4점]



> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

01 정답 ① *지수법칙-밑이 같은 계산 [정답률 91%]

(정답 공식: $(a^m)^n=a^{mn}$, $a^x\div a^y=a^{x-y}$이다.)

1st 지수법칙을 이용하자.

$\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}$ 주의 밑이 같을 때만 지수법칙을 쓸 수 있어.

$\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}$

$=2\times 2^{-1}=2^{1+(-1)}=2^0=1$

$(a^m)^n=a^{mn}$, $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a\neq 0$일 때, $a^0=1$

02 정답 ④ *도함수를 이용한 미분계수 [정답률 90%]

(정답 공식: 함수 $y=x^n$(n은 자연수)의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$)

1st 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한 후 $x=1$을 대입해 봐.

함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$에 대하여

$f'(x)=6x^2-2x$이므로

$f'(1)=6-2=4$

함수 $y=x^n$(n은 자연수)의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이고, $y=c$(c는 상수)의 도함수는 $y'=0$

03 정답 ① *등비수열의 특정항 구하기 – 특정항 이용 [정답률 88%]

(정답 공식: 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이다.)

1st 공비를 이용하여 나타내자.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_7=a_5r^2=4r^2$, $a_6=a_5r=4r$이므로

$a_7=a_6r=(a_5r)r=a_5r^2$

$a_7=4a_6-16$에서 $a_5r^2=4a_5r-16$

이때, $a_5=4$이므로 위의 식에 대입하면

$4r^2=4\times 4r-16$에서

$r^2-4r+4=0$, $(r-2)^2=0$ $\therefore r=2$

$\therefore a_8=a_5r^3=4\times 2^3=32$

$a_8=a_7r=(a_6r)r=a_6r^2=(a_5r)r^2=a_5r^3$

다른 풀이: 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 a_8의 값 구하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이야.

이때, $a_5=4$이므로 $ar^4=4$야.

따라서 $a_7=ar^6=ar^4\times r^2=4r^2$, $a_6=ar^5=ar^4\times r=4r$이므로 이것을

$a_7=4a_6-16$에 대입하면 $4r^2=4\times 4r-16$에서 $r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2=0$ $\therefore r=2$

이것을 $ar^4=4$에 대입하면 $16a=4$ $\therefore a=\dfrac{1}{4}$

따라서 $a_n=\dfrac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$이므로

$a_8=2^5=32$

$\dfrac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{-2}\times 2^{n-1}=2^{-2+(n-1)}=2^{n-3}$

톡톡 풀이: 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $r=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$임을 이용하기

$a_7=4a_6-16$의 양변을 a_5로 나누면

$\dfrac{a_7}{a_5}=\dfrac{4a_6-16}{a_5}=\dfrac{4a_6}{a_5}-\dfrac{16}{a_5}$ … ㉠이야.

이때, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\dfrac{a_7}{a_5}=r^2$, $\dfrac{a_6}{a_5}=r$이고

$a_5=4$이므로 이를 ㉠에 대입하면 ($a_7=a_5r^2$, $a_6=a_5r$)

$r^2=4r-4$에서 $(r-2)^2=0$ $\therefore r=2$

$\therefore a_8=a_5r^3=4\times 2^3=32$

04 정답 ② *정적분으로 정의된 함수의 미정계수의 결정 [정답률 70%]

(정답 공식: $f(x)=\int_a^x g(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g(x)$이다.)

1st $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$임을 이용하자.

$\int_a^x f(t)dt=x^3-ax+1$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1-a+1=0$이므로

$a=2$ $\int_1^1 f(t)dt=0$이겠지?

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-a=3x^2-2$

이므로 $f(2)=12-2=10$

05 정답 ⑤ *삼각함수의 성질 [정답률 81%]

(정답 공식: $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

1st $\sin(\pi+\theta)$의 값을 구해.

$\cos^2(\pi+\theta)+\sin^2(\pi+\theta)=1$이고 $\cos(\pi+\theta)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$은 모든 θ에 대해 성립하는 등식이야. 따라서 $\cos^2(\pi+\theta)+\sin^2(\pi+\theta)=1$ 역시 성립하는 거야.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\sin^2(\pi+\theta)=1$에서

$\sin^2(\pi+\theta)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

$\therefore \sin(\pi+\theta)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because \sin(\pi+\theta)>0$)

2nd $\tan(\pi+\theta)$의 값을 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구해.

따라서 $\tan(\pi+\theta)=\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$이므로

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\tan\theta=\tan(\pi+\theta)=2\sqrt{2}$

$\tan(\pi+\theta)=\tan x$

다른 풀이: $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 이용하여 $\tan\theta$의 값 구하기

$\cos(\pi+\theta)=-\cos x$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta<0$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\sin^2\theta+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

$\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$ $\therefore \sin\theta=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because \sin\theta<0$)

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

수능 핵강

θ는 제 몇 사분면의 각일까?

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}<0$이고

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0$에서 $\sin\theta<0$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$이야.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

이때, 각 θ가 속한 사분면에 대한 삼각함수의 부호는 표와 같으므로 θ는 제3사분면의 각이야.

06 정답 ① *함수의 연속을 이용한 미정계수의 결정 [정답률 63%]

(정답 공식: 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이다.)

1st 함수 $\{f(x)\}^2$의 $x=2$에서의 함수값과 극한값을 구하자.

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 2+}\{f(x)\}^2=\{f(2)\}^2$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-}\{f(x)\}^2=(5-2a)^2$, $\lim_{x\to 2+}\{f(x)\}^2=1$

$\{f(2)\}^2=1$ 실수 연속인 함수끼리 곱한 결과도 연속이야.

에서 $(5-2a)^2=1$이므로 $a=2$ 또는 $a=3$

$(5-2a)^2=1$에서 $5-2a=\pm 1$, $2a=4$ 또는 $2a=6$ 따라서 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $2+3=5$이다.

07 정답 ③ *곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 [정답률 72%]

(정답 공식: 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b f(x)dx$이다.)

1st 정적분을 이용하여 넓이를 구하자.

구하는 부분의 넓이는

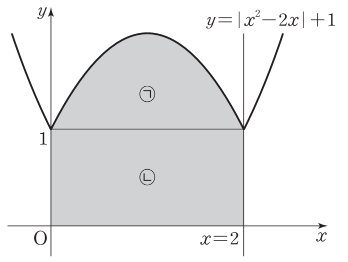
$\int_0^2(|x^2-2x|+1)dx=\int_0^2(-x^2+2x+1)dx$

구간 $[0, 2]$에서 $|x^2-2x|=-(x^2-2x)$야.

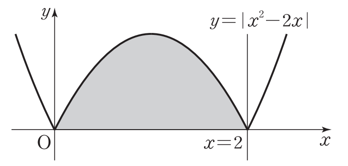
$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=-\dfrac{1}{3}\times 2^3+2^2+2=\dfrac{10}{3}$

다른 풀이: 주어진 영역을 직사각형과 나머지 부분으로 쪼개어 더 간단하게 넓이 구하기

주어진 영역을 다음과 같이 ㉠, ㉡으로 나누어 넓이를 구하자.



주어진 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=|x^2-2x|$이고 ㉠의 넓이는 곡선 $y=|x^2-2x|$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



$$\therefore \int_0^2 |x^2-2x|dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

㉡의 넓이는 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 직사각형의 넓이와 같으므로

$2\times1=2$

따라서 구하는 부분의 넓이는

㉠+㉡$=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$

08 정답 ⑤ ＊로그함수의 그래프 위의 점 [정답률 85%]

정답 공식: 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

1st 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 구하자.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times(m+3)+1\times m}{2+1}, \frac{2\times(m-3)+1\times(m+3)}{2+1}\right)$에서

내분점을 구하는 공식 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$에 대입한 형태야.

$(m+2, m-1)$이다.

2nd 내분점의 좌표를 곡선의 방정식에 대입하여 m의 값을 구해.

점 $(m+2, m-1)$이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있으므로

$m-1=\log_4(m+10)+m-3$이 성립한다.

$(m+2, m-1)$이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있으므로 x에 $m+2$, y에 $m-1$을 대입하면 등식이 성립해.

이를 정리하면

$\log_4(m+10)=2$에서 $m+10=4^2$

$\therefore m=6$

09 정답 ② ＊함수의 극값을 이용한 미정계수의 결정 [정답률 62%]

정답 공식: 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이 되도록 그린 모양이다.

1st 함수의 그래프의 개형을 살펴봐.

$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$이다.

한편, $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$에서

$g'(x)<0$인 구간에서는 $g(x)$가 감소하고, $g'(x)>0$인 구간에서는 $g(x)$가 증가해.

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

2nd 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 2개가 되는 경우를 생각해봐.

함수 $g(x)$는 극대와 극소를 가지고,

$y=f(x)$의 그래프에서 극대가 2개가 되려면 $y=g(x)$의 그래프에서 극댓값>0, 극솟값<0이어야 해.

함수 $f(x)=|g(x)|$는 극대 2개를 가져야 하므로

함수 $g(x)$의 극소인 부분이 x축 윗부분으로 올라가는, 다시 말해서 함수 $g(x)$의 그래프는 자신의 극댓값과 극솟값 사이를 x축이 지나는 형태일 수밖에 없다. 즉,

$g(0)=p>0$, $g(2)=p-4<0$이므로 $0<p<4$

$f(0)=|p|=p$, $f(2)=|p-4|=4-p$이고,

$f(0)=f(2)$이므로

$p=4-p \qquad \therefore p=2$

수능 핵강

＊극댓값과 극솟값을 모두 갖는 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계로 함수 $y=|g(x)|$의 그래프 파악하기

최고차항의 계수가 양수이고, 극대와 극소를 가지는 전형적인 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 위치에 따라 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 가지는 극값, 뾰족점 등이 달라질 수 있어.

따라서 가능한 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 모두 그려 보고, 이 중에서 함수 $y=|g(x)|$가 극대가 2개인 경우는 어떤 것인지 직관적으로 보고 판단할 수 있어야 해.

이러한 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계를 이해하는데 시간과 힘을 들여서 연습을 해놔야 수능에서 이런 경우나 이를 변형한 경우에 대해서 극값이 존재하도록 또는 존재하지 않도록 하는 곡선과 직선의 위치 관계를 바로 바로 떠올릴 수 있을 거야.

10 정답 ② ＊Σ와 등차수열의 합 [정답률 63%]

정답 공식: 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

1st 등차수열의 합의 공식을 이용해.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d(d>0)$라 하면 $a_n=a+(n-1)d$이고

문제에서 공차는 양수라 했지?

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k=\frac{9(2a+8d)}{2}=27$

등차수열의 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 9항까지의 합이지?

$\therefore a+4d=3 \Rightarrow a_5=3 \cdots$ ㉠

2nd 조건 (가)에서 경우를 나누어 절댓값을 살펴보자.

조건 (가)를 이용하려면 a_4와 a_6의 부호를 확인해야 해.

$a_5>0$이고 $d>0$이므로 $a_6>a_5>0$

(i) $a_4\geq0$인 경우

$d>0$이므로 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이야.

$|a_4|+|a_6|=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=8$

따라서 $a+4d=4$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_4<0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=-(a+3d)+(a+5d)=2d=8 \qquad \therefore d=4$

(i), (ii)에 의하여 $d=4$이므로

$a_{10}=a_5+5d=3+5\times4=23$

$a_{10}=a_9+d=a_8+2d=a_7+3d=a_6+4d=a_5+5d$

다른 풀이: 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기

위의 풀이에 의하여 $d=4$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$a+4\times4=3 \qquad \therefore a=-13$

따라서 $a_n=-13+(n-1)\times4=4n-17$이므로 $a_{10}=4\times10-17=23$

11 정답 ③ ＊사인법칙과 코사인법칙 [정답률 55%]

정답 공식: 외접원의 반지름의 길이가 R인 삼각형 ABC에서 사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$와 코사인법칙 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립한다.

1st 선분 PC의 길이를 구해.

$\angle\mathrm{PBC}=30°$, $\angle\mathrm{PCB}=15°$이므로 삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180°-(30°+15°)=135°$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BPC})}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin(\angle\mathrm{PBC})}$에서

사인법칙은 삼각형의 한 각에 대한 사인값과 그 대변의 길이의 비율이 일정하다는 공식이야. 각과 변이 헷갈리지 않도록 해.

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin135°}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin30°}$, $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\frac{1}{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{6}$

2nd 선분 AC의 길이를 구해.

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})$에서

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times2\sqrt{2}\times x\times\cos60°$

$x^2-2\sqrt{2}x-4=0 \qquad \therefore x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2+4}=\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

이차방정식이지? 인수분해가 안되면 완전제곱식의 꼴로 변형하여 해를 구하거나 근의 공식을 이용하면 돼.

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

3rd $\angle\mathrm{PCA}$의 크기를 구해.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60°}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin(\angle\mathrm{BCA})}$, $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin(\angle\mathrm{BCA})} \qquad \therefore \sin(\angle\mathrm{BCA})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

그런데 $\angle\mathrm{BAC}=60°$에서 $\angle\mathrm{BCA}<120°$이므로 $\angle\mathrm{BCA}=45°$이다.

$\therefore \angle\mathrm{PCA}=\angle\mathrm{BCA}-\angle\mathrm{PCB}=45°-15°=30°$

4th 삼각형 APC의 넓이를 구해.

삼각형 APC의 넓이를 S라 하면

이웃한 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$야.

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{PCA})$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30°=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

12 정답 ④ *도형의 길이에 대한 극한 .... [정답률 42%]

(정답 공식: 두 점 A, B에 대하여 $A(\alpha, \alpha+g(t))$, $B(\beta, \beta+g(t))$로 나타내어 $\overline{AB}^2$의 값을 이용하여 $g(t)$의 값을 구한다.)

1st 두 점 A, B의 x좌표를 각각 나타내자.

직선 l의 기울기가 1이고 y절편은 $g(t)$이므로 직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$이다.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $A(\alpha, \alpha+g(t))$, $B(\beta, \beta+g(t))$이고,
α, β는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$, 즉 $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$ … ㉠

→ 두 식 $y=x^2$과 $y=x+g(t)$를 연립한 식이야.

→ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2nd $g(t)$를 구하자.

$\overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha-\beta)^2$이고,
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4g(t)$($\because$ ㉠)이므로
$\overline{AB}^2=2+8g(t)$에서 $4t^2=2+8g(t)$이다.

따라서 $g(t)=\dfrac{4t^2-2}{8}=\dfrac{2t^2-1}{4}$이므로 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t^2-1}{4t^2}=\dfrac{1}{2}$

→ $t\to\infty$이고 분자와 분모의 차수가 같으므로 극한값을 구하려면 최고차항의 계수만 비교하면 되겠지?

13 정답 ④ *삼각방정식 – 이차식 꼴 .... [정답률 41%]

(정답 공식: 함수 $y=\sin x$의 그래프는 주기성과 대칭성을 가진다.)

1st 조건 (가)를 만족시키는 a의 값을 구해.

조건 (가)의 $\{g(a\pi)\}^2=1$에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.
이때, $0\le a\le2$이므로 $\sin a\pi=-1$에서 $a=\dfrac{3}{2}$이고,

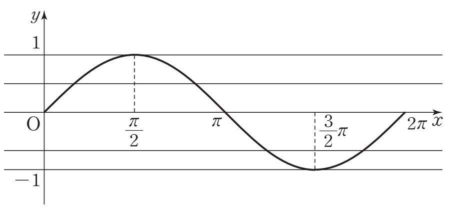
→ $a\pi=\cdots, -\dfrac{5}{2}\pi, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{7}{2}\pi, \cdots$
$\therefore a=\cdots, -\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}, \cdots$

$\sin a\pi=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$이다.

→ $a\pi=\cdots, -\dfrac{7}{2}\pi, -\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{2}\pi, \cdots$
$\therefore a=\cdots, -\dfrac{7}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots$

2nd $g(x)=\sin x$의 대칭성을 이용하여 $f(g(x))=0$의 해의 합을 살펴봐.

$f(g(x))=0$에서 $g(x)=t(-1\le t\le1)$이라 하면 조건 (나)에 의하여
$-1\le \sin x\le1$ / 방정식 $f(t)=0$의 해가 존재한다는 거야.
$-1\le t\le1$에서 $f(t)=0$, 즉 $t^2+at+b=0$을 만족시키는 t의 값이 존재한다.



→ 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표야.

$0\le x\le2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은
$t=-1$일 때 $\dfrac{3}{2}\pi$, $-1<t\le0$일 때 3π, $0<t<1$일 때 π,
$t=1$일 때 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

→ $0<x\le2\pi$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서 만나면 그 두 점은 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이야.

3rd 조건을 만족시키는 $f(x)$를 찾고 $f(2)$의 값을 구해.

$0\le x\le2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\dfrac{5}{2}\pi$이므로
방정식 $f(t)=0$은 두 실근 -1, a를 가지고 $0<a<1$이다. … ㉠

→ $t=g(x)=-1$일 때 $f(g(x))=0$의 해는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$,
$t=g(x)=a$일 때 $f(g(x))=0$의 해는 2개이고 그 합은 π야.
따라서 방정식 $f(t)=0$의 해가 $t=-1$ 또는 $t=a$일 때
방정식 $f=g(x)=0$의 모든 해의 합은 $\dfrac{3}{2}\pi+\pi=\dfrac{5}{2}\pi$야.

(i) $a=\dfrac{3}{2}$일 때

$f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+b$이고 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=(-1)^2+\dfrac{3}{2}\times(-1)+b=0$ $\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$이므로

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$이다.

이것은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=(-1)^2+\dfrac{1}{2}\times(-1)+b=0$ $\quad\therefore b=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$이므로

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$이다.

이것은 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$이므로

$f(2)=2^2+\dfrac{1}{2}\times2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$이다.

14 정답 ⑤ *곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 .... [정답률 38%]

(정답 공식: 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$, $x=\sqrt{3}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^{\sqrt{3}}|f(x)|dx$이다.)

1st $x=k$에서 미분가능함을 이용하자.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.
이때, 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로
$f(k)=\lim\limits_{x\to k-}f(x)=ak$

→ 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 연속이려면 함숫값 $f(k)$가 존재하고 극한값 $\lim\limits_{x\to k}f(x)$가 존재하면서 그 두 값이 같아야 해.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

→ $x=a$에서 미분가능하려면 $x=a$에서 연속이고 $x=a$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 해.

$f'(k)=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{ax-ak}{x-k}=a$

ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)

2nd $x=k$에서 미분가능하도록 이어져야 해.

ㄴ. $g(x)=-x^2+4bx-3b^2$이라 하자.
직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고, 접점의 좌표는 $(k, g(k))$이다.

→ 직선 $y=ax$와 곡선 $y=-x^2+4bx-3b^2$이 미분가능하도록 이어지는 지점이 $x=k$야. 즉, $y=ax$는 $x=k$에서의 접선이라고 할 수 있어.

$g'(x)=-2x+4b$이므로
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$에서의 접선의 방정식은
$y-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(x-k)$이다.
또한, 이 직선이 원점을 지나므로
위 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$0-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(0-k)$에서
$k^2-4bk+3b^2=2k^2-4bk$
$k^2-3b^2=0$
$\therefore k=\sqrt{3}b$ ($\because k>0, b>0$)

$k=3$이면 $b=\dfrac{k}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$이고

$a=g'(k)=-2k+4b=-6+4\sqrt{3}$ (참)

3rd ㄷ을 확인하기 위해 $f(k)$, $f'(k)$를 구하자.

ㄷ. ㄴ에서 $a=(4-2\sqrt{3})b$, $k=\sqrt{3}b$를 대입하면

→ $a=g'(k)=-2k+4b=-2\sqrt{3}b+4b=(4-2\sqrt{3})b$

$f(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})bx & (x<\sqrt{3}b)\\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\ge\sqrt{3}b)\end{cases}$이고

$f'(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})b & (x<\sqrt{3}b)\\ -2x+4b & (x>\sqrt{3}b)\end{cases}$이다.

$f(k)=f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b)=f'(\sqrt{3}b)$이므로

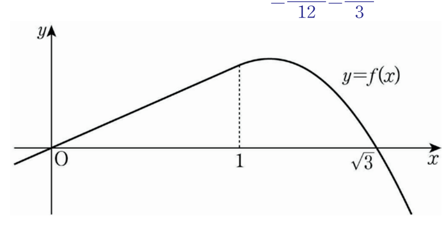
→ $f'(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})b & (x<\sqrt{3}b)\\ -2x+4b & (x>\sqrt{3}b)\end{cases}$로 $x=\sqrt{3}b$일 때의 도함수는 구할 수 없어. 그러나 조건에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하니까 좌우극한값이 같겠지? 따라서 극한값으로 그 값을 구할 수 있는 거야.

$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2=-2\sqrt{3}b+4b$
$(-6+4\sqrt{3})b^2=(-2\sqrt{3}+4)b$
$\therefore b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because b>0$)

→ $b=\dfrac{-2\sqrt{3}+4}{-6+4\sqrt{3}}=\dfrac{(-2\sqrt{3}+4)\times(-6-4\sqrt{3})}{(-6+4\sqrt{3})\times(-6-4\sqrt{3})}=\dfrac{12\sqrt{3}+24-24-16\sqrt{3}}{36-48}=\dfrac{4\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1)\\ -x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x\ge1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 만나므로 구하는 넓이는

→ $x=1$을 경계로 함수가 달라지지? 구간을 나누어서 넓이를 구해야 해.

$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+\int_1^{\sqrt{3}}f(x)dx$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}+\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$

→ $-\dfrac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(3-1)-(\sqrt{3}-1)$
$=-\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+1$
$=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

수능 핵강

＊ 계산이 복잡해 보여도 알고 있는 개념을 총동원하여 함수 $f(x)$의 그래프를 구체적으로 살펴보기

$x<1$에서 직선을 살펴보자.

$4\sqrt{3}-6>0$이라 하면 $4\sqrt{3}>6$이고 양변을 제곱하면 $48>36$이므로 참이야.

따라서 직선 $y=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}x$는 원점을 지나고, 제 1, 3사분면을 지나.

$x\geq 1$에서의 곡선을 살펴보자.

$y=-x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1=-\left\{x^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1$

$=-\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{1}{3}$

이고, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$이므로 곡선의 최댓값이 $x=1$보다 오른쪽에 위치하도록 그래프를 그려야 해.

15 정답 ③ ＊수열의 귀납적 정의－경우 나누기 [정답률 42%]

(정답 공식: a_2의 값이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 a_2의 값을 구한다.)

1st $a_6=34$임을 이용하여 a_5+a_4의 값을 구해.

a_5+a_4가 홀수이면 $a_6=a_5+a_4$가 홀수이므로 $a_6=34$에 모순이다.

즉, a_5+a_4는 짝수이므로 $a_6=\dfrac{1}{2}(a_5+a_4)=34$에서

$a_5+a_4=68$

2nd a_2가 짝수와 홀수인 경우로 나누어 $a_6=34$일 때의 a_2의 값을 구해.

(ⅰ) a_2가 짝수, 즉 $a_2=2n$(n은 자연수)일 때,

$a_2+a_1=2n+1$은 홀수이므로 $a_3=a_2+a_1=2n+1$이다.

$a_3+a_2=(2n+1)+2n=4n+1$은 홀수이므로

$a_4=a_3+a_2=4n+1$이다.

$a_4+a_3=(4n+1)+(2n+1)=\underbrace{6n+2}_{6n+2=2(3n+1)}$는 짝수이므로

$a_5=\dfrac{1}{2}(a_4+a_3)=\dfrac{1}{2}(6n+2)=3n+1$이다.

이때, $a_5+a_4=68$에서 $(3n+1)+(4n+1)=68$

$7n+2=68$, $7n=66$ $\quad\therefore n=\dfrac{66}{7}$

이는 n이 자연수란 조건에 모순이므로 a_2는 짝수가 될 수 없다.

(ⅱ) a_2가 홀수 즉, $a_2=2n-1$(n은 자연수)일 때,

$a_2+a_1=(2n-1)+1=2n$은 짝수이므로

$a_3=\dfrac{1}{2}(a_2+a_1)=\dfrac{1}{2}\times 2n=n$이다.

이때, $a_3+a_2=n+(2n-1)=3n-1$이고

$3n-1$은 홀수일수도, 짝수일 수도 있으므로 a_3+a_2의 값이 짝수인 경우와 홀수인 경우를 나눠야겠지?

ⅰ) $3n-1$이 홀수일 때, $a_4=a_3+a_2=3n-1$이다.

$3n-1$이 홀수이면 n은 짝수야.

따라서 $a_4+a_3=(3n-1)+n=4n-1$은 홀수이므로

$a_5=a_4+a_3=4n-1$이다.

이때, $a_5+a_4=68$에서 $(4n-1)+(3n-1)=68$, $7n-2=68$

$7n=70$ $\quad\therefore n=10$

$3n-1$이 짝수면 n은 홀수야.

ⅱ) $3n-1$이 짝수일 때, $a_4=\dfrac{1}{2}(a_3+a_2)=\dfrac{3n-1}{2}$이다.

$a_4+a_3=\dfrac{3n-1}{2}+n=\dfrac{5n-1}{2}$이므로

$3n-1$은 짝수이므로 n은 홀수야. 즉 $\dfrac{5n-1}{2}$은 자연수야.

따라서 a_4+a_3의 값이 짝수인 경우와 홀수인 경우를 나눠야겠지?

$\dfrac{5n-1}{2}$이 홀수이면 $a_5=a_4+a_3=\dfrac{5n-1}{2}$이고

$\dfrac{5n-1}{2}$이 짝수이면 $a_5=\dfrac{1}{2}(a_4+a_3)=\dfrac{5n-1}{4}$이다.

$a_5=\dfrac{5n-1}{2}$일 때, $a_5+a_4=68$에서

$\dfrac{5n-1}{2}+\dfrac{3n-1}{2}=68$

$4n-1=68$, $4n=69$

$\therefore n=\dfrac{69}{4}$

그런데 n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

또 $a_5=\dfrac{5n-1}{4}$일 때, $a_5+a_4=68$에서 $\dfrac{5n-1}{4}+\dfrac{3n-1}{2}=68$

$\dfrac{11n-3}{4}=68$, $11n-3=272$, $11n=275$

$\therefore n=25$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 n의 값은 10 또는 25이다.

한편 $a_2=2n-1$이므로 $n=10$일 때, $a_2=2\times 10-1=19$이고

$n=25$일 때, $a_2=2\times 25-1=49$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_2의 값의 합은 $19+49=68$이다.

16 정답 4 ＊로그의 여러 가지 성질 [정답률 95%]

(정답 공식: $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$))

1st 로그의 밑을 통일하여 식의 값을 구해.

$\log_6 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 6}=\dfrac{1}{\log_2 6}$이므로

$\log_2 96-\dfrac{1}{\log_6 2}=\log_2 96-\log_2 6=\underbrace{\log_2 \dfrac{96}{6}}_{\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}}$

$=\log_2 16=\underbrace{\log_2 2^4}_{\log_a b^n=n\log_a b,\ \log_a a=1\text{이야.}}=4$

로그의 성질 개념·공식

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수이다.)

17 정답 11 ＊곡선 위의 점에서 그은 접선의 방정식 [정답률 80%]

(정답 공식: 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이다.)

1st 접선의 기울기가 4임을 이용하자. 접점의 좌표를 미지수로 두면 미분계수(접선의 기울기)를 이 미지수를 이용하여 나타낼 수 있어.

직선 $y=4x+5$와 곡선 $y=2x^4-4x+k$가 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 접한다고 하자.

$f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=8a^3-4=4$, $a^3=1$

$\therefore a=1$

주의 접점은 두 그래프가 만나는 점이니까 이 점은 직선 위의 점이기도 하고 곡선 위의 점이기도 해.

2nd 접점을 대입하자.

점 $\mathrm{P}(1, b)$는 직선 $y=4x+5$ 위의 점이므로

$b=4\times 1+5=9$

$\therefore \mathrm{P}(1, 9)$

이때, 점 P는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이기도 하므로

$f(1)=2-4+k=9$, $k-2=9$

$\therefore k=11$

18 정답 427 ＊Σ의 활용 － 새롭게 정의된 수열 [정답률 75%]

(정답 공식: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$이다.)

1st $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대하여 나타내.

x에 대한 이차방정식 $x^2-5nx+4n^2=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=5n$, $\alpha_n\beta_n=4n^2$

2nd 주어진 식의 값을 구해.

$(1-\alpha_n)(1-\beta_n)=1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n$

$=1-5n+4n^2$

상수 c와 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$(복호동순), $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\therefore \sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)=\sum_{n=1}^{7}(1-5n+4n^2)$

$=\sum_{n=1}^{7}1-5\sum_{n=1}^{7}n+4\sum_{n=1}^{7}n^2$

$\sum_{k=1}^{n}c=cn$, $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=1\times 7-5\times\dfrac{7\times 8}{2}+4\times\dfrac{7\times 8\times 15}{6}$

$=427$

다른 풀이: α_n, β_n을 직접 구해서 해결하기

$x^2-5nx+4n^2=(x-n)(x-4n)=0$에서

$x=n$ 또는 $x=4n$

$\therefore \alpha_n=n$, $\beta_n=4n$

(이하 동일) $\alpha_n=4n$, $\beta_n=n$이라 해도 결과는 달라지지 않아.

톡톡 풀이: 이차방정식의 두 근이 주어졌을 때 이차방정식을 세워 해결하기

$x^2-5nx+4n^2=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로

$x^2-5nx+4n^2=(x-\alpha_n)(x-\beta_n)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-5n+4n^2=(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$

(이하 동일)

19 정답 18 *적분을 이용한 점의 위치 [정답률 45%]

정답 공식: 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 이 점의 시각 $t=a$에서의 위치는 $\int_0^a v(t)dt$이다.

1st t초에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구해.

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

속도를 나타내는 함수 $v_1(t)$, $v_2(t)$를 각각 적분한 결과야.
$\int_0^t v_1(t)dt=\int_0^t(3t^2-15t+k)dt=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt$
$\int_0^t v_2(t)dt=\int_0^t(-3t^2+9t)dt=-t^3+\frac{9}{2}t^2$

$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt\,(k>0)$, $x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$

주의 위치 함수를 구하면 처음 위치를 체크하는 것을 잊지마. 원점에서 출발했으므로 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$이야.

2nd 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간이 한 번임을 이용하자.

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t>0$에서 방정식 $x_1(t)=x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$x_1(t)-x_2(t)=0$에서

$t^3-\frac{15}{2}t^2+kt-\left(-t^3+\frac{9}{2}t^2\right)=0$, $2t^3-12t^2+kt=0$

$\therefore t(2t^2-12t+k)=0 \cdots$ ㉠

이때, $t>0$이고, ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 1개이어야 하므로 이차방정식 $2t^2-12t+k=0$은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-2\times k=0$, $2k=36$

$\therefore k=18$

> **점의 위치와 움직인 거리** 개념·공식
>
> 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때,
>
> ① $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$
>
> ② $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$

20 정답 66 *정적분의 값을 이용한 다항함수의 추론 [정답률 23%]

정답 공식: 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이고,
$\int_0^a x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^a=\frac{a^{n+1}}{n+1}\,(n\neq -1)$이다.

1st $g'(0)=0$임을 이용하자.

조건 (가)의 도함수의 값을 이용하려면 함숫값 $g(0)$을 알아야 하고, 조건 (나)에서 $g(0)=f(0+p)-f(p)=0$임을 알 수 있다.

이때, $x=0$에서 좌, 우미분계수를 각각 구해 보면

미분계수의 정의를 적용할 수 있어야 해.
$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(-p+h)-f(-p)}{h}=f'(-p)$

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$

$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$

2nd $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차식임을 이용하여 식으로 나타내자.

$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$ (단, C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$이다.

3rd $\int_0^p g(x)dx=20$을 이용하자.

$x\geq 0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$\int_0^p g(x)dx$

$=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}dx$

직접 식을 정리해야 해.
$f(x+p)-f(p)$
$=(x+p)^3-3p^2(x+p)+1-(p^3-3p^3+1)$
$=x^3+3px^2+3p^2x+p^3-3p^2x-3p^3+1-p^3+3p^3-1$
$=x^3+3px^2$

$=\int_0^p(x^3+3px^2)dx=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{p^4}{4}+p^4=\frac{5}{4}p^4=20$

이므로 $p^4=2^4$에서 $p=2$ ($\because p>0$)이고, $f(x)=x^3-12x+1$

$\therefore f(5)=5^3-12\times 5+1=125-60+1=66$

21 정답 12 *지수함수와 로그함수 [정답률 32%]

정답 공식: $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$, $\triangle CAD=35$임을 이용하여 연립방정식을 세운다.

1st 네 점 A, B, C, D의 좌표를 a, k로 나타내.

점 A의 y좌표는 k이고 곡선 $y=2\log_a x+k$ 위의 점이므로

$k=2\log_a x+k$에서 $2\log_a x=0$, $\log_a x=0$ $\quad\therefore x=1$

1이 아닌 양수 a에 대하여 $\log_a 1=0$

$\therefore$ A$(1,\ k)$

점 B의 y좌표는 k이고 곡선 $y=a^{x-k}$ 위의 점이므로

$k=a^{x-k}$에서 $x-k=\log_a k$ $\quad\therefore x=\log_a k+k$

$\therefore$ B$(\log_a k+k,\ k)$ $\quad a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$

점 C의 x좌표는 k이고 곡선 $y=2\log_a x+k$ 위의 점이므로

$y=2\log_a k+k$ $\quad\therefore$ C$(k,\ 2\log_a k+k)$

점 D의 x좌표는 k이고 곡선 $y=a^{x-k}$ 위의 점이므로

$y=a^{k-k}=a^0=1$ $\quad\therefore$ D$(k,\ 1)$

2nd 주어진 조건을 이용하여 a, k의 값을 각각 구하고 $a+k$를 계산해.

두 점 A, B의 y좌표가 k로 같으므로

$\overline{AB}=(\log_a k+k)-1=\log_a k+k-1$

y좌표가 같은 두 점 사이의 거리는 두 점의 x좌표의 차의 절댓값이야.
그런데 문제의 그림에서 점 B의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 크지?

또, 두 점 C, D의 x좌표가 같으므로

$\overline{CD}=(2\log_a k+k)-1=2\log_a k+k-1$

x좌표가 같은 두 점 사이의 거리는 두 점의 y좌표의 차의 절댓값이야.
그런데 문제의 그림에서 점 C의 y좌표가 점 D의 y좌표보다 크지?

한편, 두 선분 AB, CD의 교점을 E라 하면 점 E의 좌표는 $(k,\ k)$이므로

$\overline{AE}=k-1$이다.

1보다 큰 실수 a, k이므로 $m=\log_a k>0$, $n=k-1>0$

이때, $\log_a k=m$, $k-1=n\,(m>0,\ n>0)$이라 하면

$\overline{AB}\times\overline{CD}=85$에서 $(\log_a k+k-1)(2\log_a k+k-1)=85$

$\therefore (m+n)(2m+n)=85 \cdots$ ㉠

또, 삼각형 CAD의 넓이가 35이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AE}=35$에서

$\frac{1}{2}(2\log_a k+k-1)(k-1)=35$, $\frac{1}{2}(2m+n)n=35$

$\therefore (2m+n)n=70 \cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $m(2m+n)=15 \cdots$ ㉢

㉡$\div$㉢을 하면 $\frac{n}{m}=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$ $\quad\therefore n=\frac{14}{3}m \cdots$ ㉣

이것을 ㉢에 대입하면 $m\left(2m+\frac{14}{3}m\right)=15$

$\frac{20}{3}m^2=15$, $m^2=\frac{9}{4}$

$\therefore m=\frac{3}{2} \Rightarrow n=\frac{14}{3}\times\frac{3}{2}=7$ ($\because$ ㉣)

$m=\log_a k$이고 a, k가 모두 1보다 큰 실수이므로 $m=\log_a k>0$이야.

즉, $n=k-1=7$에서 $k=8$이고 $m=\log_a k$에서 $\frac{3}{2}=\log_a 8$이므로

$a^{\frac{3}{2}}=8$, $a^3=64$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore a+k=4+8=12$

다른 풀이: 삼각형의 넓이의 비를 이용하여 $\log_a k$, $k-1$의 비 구하기

A$(1,\ k)$, B$(\log_a k+k,\ k)$, C$(k,\ 2\log_a k+k)$, D$(k,\ 1)$이고

두 선분 AB, CD의 교점을 E라 하면 점 E의 좌표는 $(k,\ k)$야.

즉, $\log_a k=m$, $k-1=n$이라 하면

$\overline{AB}=\log_a k+k-1=m+n$, $\overline{CD}=2\log_a k+k-1=2m+n$

$\overline{AE}=k-1=n$, $\overline{BE}=\log_a k=m$

이때, □ADBC$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{85}{2}$이고,

삼각형 CAD의 넓이가 35이므로

$\triangle$BCD$=$□ADBC$-\triangle$CAD$=\frac{85}{2}-35=\frac{15}{2}$야.

따라서 두 삼각형 CAD, BCD의 넓이의 비가 $35:\frac{15}{2}=14:3$이므로

$\overline{AE}:\overline{BE}=14:3$에서 $n:m=14:3$이야.

$\therefore m=\frac{3}{14}n$ $\quad$ 밑변의 길이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같아.

한편, $\triangle$CAD$=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AE}=35$에서 $\frac{1}{2}(2m+n)n=35$

$\therefore (2m+n)n=70$

여기에 $m=\frac{3}{14}n$을 대입하면

$\left(2\times\frac{3}{14}n+n\right)n=70$에서

$\frac{10}{7}n^2=70$, $n^2=49$

$\therefore n=7$, $m=\frac{14}{3}\times 7=\frac{3}{2}$

(이하 동일) $\quad n=k-1$이고 k가 1보다 큰 실수이므로 $n=k-1>0$이야.

22 정답 729 *도함수를 이용한 함수의 추론 [정답률 5%]

단서1 함수 $y=f(x)$의 그래프 중 직선 $y=t$보다 아래인 부분을 접어서 올린 형태야.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,
$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

단서2 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 것은 특수한 경우야.
$x>k$인 경우와 $x<k$인 경우로 나누어 생각해봐.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{t\to 4+}h(t)=5$
(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. (4점)

왜 1등급? 미분계수로부터 식의 값이 존재하는 경우를 찾고, $h(t)$에 대해 주어진 조건을 바탕으로 $f(x)$의 그래프 개형과 식을 구하는 문제이다. 미분계수에서 좌극한과 우극한의 부호가 반대가 되는 지점을 찾아내는 과정에서 발상이 필요했고, $h(t)$가 두 지점에서만 불연속이 되도록 하는 사차함수 그래프 개형을 찾아내는 것이 어려웠다.

단서+발상

단서1 $g(t)$는 $f(x)=t$보다 아래인 부분을 접어서 올린 형태이므로, $g(x)=0$인 지점에서 기울기의 좌극한과 우극한의 부호가 반대이다. 개념

단서2 $x>k$인 경우 $\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$는 $x=k$에서의 우극한과 같고,

$x<k$인 경우 $\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$는 $x=k$에서의 좌극한에서 부호만 변화시킨 값과 같다. 개념

$x=k$에서 $\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 좌극한과 우극한의 부호가 다르면서 절댓값은 동일한 점은 $g'(k)$가 0이 되거나 $g(x)$가 0이 되는 지점이다. 발상

주의 $h(t)$가 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이라는 것은 $f(x)$의 극값의 크기로 -60과 4만 가능하다는 의미로 해석할 수 있다.

핵심 정답 공식: 미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다.

[문제 풀이 순서]

1st $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 경우를 생각해 보자.

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k-}\left(\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\dfrac{x-k}{|x-k|}\right)$

x가 k보다 작은 쪽에서 가까워지기 때문에 $|x-k|=-(x-k)$

$=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(-1)$ ⋯ ㉠

$\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim\limits_{x\to k+}\left(\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\dfrac{x-k}{|x-k|}\right)$

$=\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}\times 1$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$이거나

$\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$와 $\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}$의 절댓값이 같고 부호가 반대이어야 한다.

$x=k$에서 좌극한과 우극한의 절댓값이 같고 부호가 반대라는 말이지? 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점이어야 해. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점이므로 $f(x)=t$ 즉, $|f(x)-t|=0$이야.

실수 미분계수와의 연관성을 생각해 봐. 부호에서만 차이가 있고 절댓값이 같은 경우를 찾아야 해.

따라서 $g'(k)=0$ 즉, $f'(k)=0$이거나 $g(k)=0$, 즉 $f(k)=t$이다.

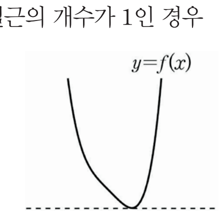
2nd 사차함수의 그래프의 형태를 생각해서 조건을 만족시키는 함수 $h(t)$를 찾아 보자.

주의 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 변화하는 지점이 $h(t)$가 불연속이 되는 지점이야.

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

$f'(x)=0$은 최고차항의 계수가 4인 삼차방정식이므로 서로 다른 실근의 개수가 1개, 2개, 3개인 3가지 경우로 나눌 수 있어. 특히 2개인 경우는 한 실근과 중근을 가지는 경우야.

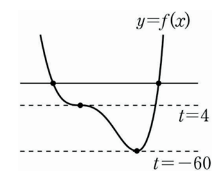
(i) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



함수 $h(t)$가 불연속이 되는 실수 t가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$y=f(x)$의 극솟값을 a라고 하면 $t\le a$일 때는 $g'(k)=0$인 지점에서만 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$가 존재해. 즉 $h(t)=1$
$t>a$일 때는 $g'(k)=0$인 지점 1곳과 $y=f(x)$와 $y=t$의 교점이 2곳이므로 $h(t)=3$이지?
따라서 $h(t)$는 $t=a$에서만 불연속이야.

(ii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

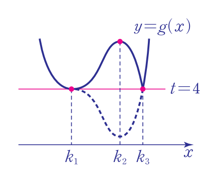


함수 $h(t)$가 $t=-60$과 $t=4$에서 불연속이므로 $f'(a)=0$일 때 $f(a)$의 값은 -60과 4이다.

이때 $\lim\limits_{t\to 4+}h(t)=4$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

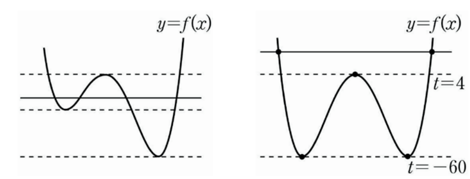
(ii)인 경우에는 $g'(k)=0$인 지점은 2곳이고 t의 값의 범위에 따라 $h(t)$를 구하면 다음과 같아.

	$y=f(x)$와 $y=t$의 교점의 개수	$h(t)$
$t>4$	2	4
$t=4$	2 (한 개가 $g'(k)=0$인 지점과 중복)	3
$-60<t<4$	2	4
$t=-60$	1 ($g'(k)=0$인 지점과 중복)	2
$t<-60$	0	2



그림을 확인해.

(iii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



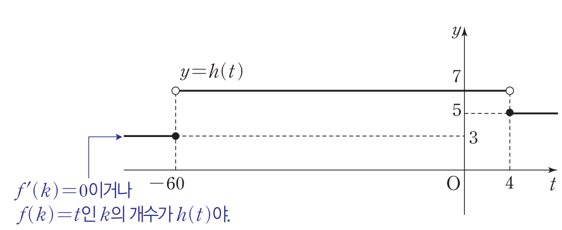
[그림 1] [그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 $f(x)$의 극댓값과 극솟값일 때의 t의 값을 기준으로 바뀌어. 따라서 함수 $h(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 $f(x)$의 극댓값과 극솟값일 때의 $x=t$의 개수와 같으므로 3개야.

[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고,
함수 $f(x)$의 극댓값이 4이면 $\lim\limits_{t\to 4+}h(t)=5$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

이때, $h(4)=5$



3rd 함수 $y=f(x)$를 구하자.

함수 $f(x)$의 식을 직접 찾는 것은 복잡해. 적당히 함수의 평행이동을 이용하면 식을 간단히 구할 수 있어.

(i)~(iii)에 의하여 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 3개의 극값 중 두 극솟값은 모두 -60, 극댓값은 4이다. $f(2)=4$이고 $f'(2)>0$이므로 방정식 $f(x)=4$의 가장 큰 실근이 2가 된다.

함수 $f(x)$의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는

x축의 방향으로 얼마만큼 평행이동을 하는지 알 수 없지만, y축의 방향으로는 -4만큼 이동하겠지?

함수를 $p(x)$라 하면 $p(0)=0$이고 $p'(0)=0$이므로 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.
또한, 함수 $p(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 양수 a에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$이라 하면 $p(x)$는 $x-a$, $x+a$를 인수로 갖는다. 즉,
$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$이고,
$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$이므로
$p'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$2x^2-a^2=0$, $2x^2=a^2$, $x^2=\dfrac{a^2}{2}$
$x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64$이므로

$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=-\dfrac{a^4}{4}=-64$

즉, $a^4=256=4^4$이므로 $a=4$이다.

이때, $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$에 대하여

방정식 $p(x)=0$의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.

우리는 $f(x)=4$의 가장 큰 실근이 2인 함수를 찾아야 하는 거니까 평행이동을 다시 이용해 보자. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 함수를 $y=p(x)$라고 해봐. $f(x)=4$의 가장 큰 실근이 2이면 $p(x)=0$을 만족시키는 가장 큰 실근은 $4=2+a$이므로 $a=2$야.

따라서 $f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$이므로

$f(4)=724$, $h(4)=5$

$\therefore f(4)+h(4)=724+5=729$

1등급 대비 특강

＊ 조건 (가)가 주어진 이유

함수 $h(t)$가 불연속이 되는 지점은 t의 값이 $f(x)$의 극값과 같을 때이며 여기서 $f(x)$의 극솟값은 -60, 극댓값은 4가 돼. 불연속이 되는 지점은 두 개 뿐이므로 서로 다른 극값 두 개를 가지거나, 세 개의 극값을 가지면서 극솟값의 크기가 서로 같은 경우만이 $f(x)$의 개형으로 성립함을 알 수 있어. 여기서 $x=4$에서 $h(t)$의 우극한이 5가 된다는 조건이 주어져 있기 때문에 $f(x)$는 세 개의 극값을 가지며, 두 극솟값의 크기가 서로 같은 경우라고 한정할 수 있어.

My Top Secret 서울대 선배의 1등급 대비 전략

주로 특수한 형태의 그래프, 또는 특수한 지점이 풀이에 핵심적으로 작용해.
이번 문제에서는 함숫값이 0이 되는 지점과 극값이 함수 $f(x)$의 불연속을 결정하는 중요한 요소였어!

선택과목: 확률과 통계

23 정답 ① ＊자연수의 개수와 중복순열 [정답률 87%]

(정답 공식: ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$, ${}_n\Pi_r=n^r$)

1st 순열과 중복순열의 값을 각각 구하여 더하자.

${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$

${}_3P_2=3\times2=6$, ${}_3\Pi_2=3^2=9$이므로

${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$

${}_3P_2+{}_3\Pi_2=6+9=15$

24 정답 ③ ＊원순열 [정답률 90%]

(정답 공식: 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.)

1st 원 모양의 탁자에 모두 앉히는 경우의 수는 원순열로 구하자.

학생 5명을 원 모양의 탁자에 앉히는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4\times3\times2\times1$

서로 다른 5개에서 하나를 고정한 후 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수이므로 $(5-1)!$

$=24$

25 정답 ④ ＊같은 것이 있는 문자의 나열 [정답률 83%]

(정답 공식: n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$))

1st B가 적힌 카드 두 장을 고정해 두고, 나머지 카드만 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하자.

양 끝에 모두 B가 적힌 카드를 놓고, 그 사이에 A, A, A, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 나머지 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면 된다.

$\therefore$ (구하는 경우의 수)$=\dfrac{6!}{3!2!}=60$

A가 3개, B가 1개, C가 2개이므로 원래는 $\dfrac{6!}{3!1!2!}$로 표기해야 하지만 $1!=1$이므로 1개만 있는 것은 생략해.

26 정답 ⑤ ＊자연수의 개수와 중복순열 [정답률 67%]

(정답 공식: ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$, ${}_n\Pi_r=n^r$)

1st 주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 선택하는 조합으로 구할 수 있지.

주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는

서로 다른 n개의 공에서 순서 없이 r개만 선택하는 것이므로 서로 다른 n개에서 r개를 뽑는 조합을 이용해야 해.

${}_6C_3=\dfrac{{}_6P_3}{3!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$(가지)

2nd 남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 방법의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 선택하는 중복순열로 구하자.

서로 다른 3개의 남은 공을 2개의 주머니 B, C에 넣는 방법의 수는

실제로, A 주머니에 3개를 먼저 넣은 후 남은 공 3개를 a, b, c라 하고, 이를 B, C 주머니에 넣는 경우의 수를 직접 순서쌍 (B 주머니에 든 공, C 주머니에 든 공)으로 나열해 보면 $(0, abc)$, (a, bc), (b, ca), (c, ab), (bc, a), (ca, b), (ab, c), $(abc, 0)$으로 8가지야.

${}_2\Pi_3=2^3=8$(가지)

3rd 주머니 A에 3개의 공을 택하여 넣는 각각의 경우에 대해 나머지 3개를 2개의 주머니에 넣는 것이므로 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하자.

따라서 구하는 경우의 수는 주머니 A에 넣을 3개의 공을 택한 각각의 경우에 대해 서로 다른 3개의 남은 공을 2개의 주머니에 넣는 방법의 수가 8가지씩이므로 곱의 법칙에 의해

$20\times8=160$(가지)

27 정답 ② ＊방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해 [정답률 63%]

(정답 공식: 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m=n$ (m, n은 자연수)에 대하여 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_mH_n$이다.)

1st 방정식을 음이 아닌 정수해의 개수 구하는 문제로 변형해.

$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d-1$이라 하면

a, b, c, d에서 각각 1씩을 뺀 값을 a', b', c', d'이라 하면 a', b', c', d'은 음이 아닌 정수로 만들 수 있어.

$a+b+c+3d=10$에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+3(d'+1)=10$

$a'+b'+c'+3d'=4$ (단, a', b', c', d'은 모두 음이 아닌 정수)

2nd 계수가 큰 쪽인 d'에 0, 1을 차례대로 대입해 순서쌍 (a', b', c', d')의개수를 구하자.

(i) $d'=0$인 경우

$a'+b'+c'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

(ii) $d'=1$인 경우

$a'+b'+c'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$(가지)

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$15+3=18$(가지)이다.

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용하여야 해.

방정식의 정수해의 순서쌍의 개수 개념·공식

① 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

② 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$를 만족시키는 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수는 ${}_nH_r$

③ 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r(n\le r)$를 만족시키는 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 양의 정수해의 순서쌍의 개수는 ${}_nH_{r-n}$

28 정답 ⑤ ＊원순열 [정답률 38%]

(정답 공식: 원순열을 이용하되, 서로 다른 빵과 같은 종류의 사탕임에 유의하여 케이스를 잘 분류하여 경우의 수를 구한다.)

1st 조건 (가)를 만족시키도록 빵이 2개 담기는 접시를 하나 정하자.

서로 다른 빵은 5개이고, 접시는 4개이므로 조건 (가)를 만족시키려면 반드시 빵이 2개 담기는 접시가 하나 생기게 된다.

빵이 2개 담기는 접시를 맨 위쪽 접시라고 하면, 나머지 세 접시에는 서로 다른 빵이 각각 하나씩만 담기게 된다. 즉, 서로 다른 5개의 빵에서 맨 위쪽 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$(가지)

또한, 남은 서로 다른 3개의 빵을 담는 경우의 수는

나머지 세 개의 접시를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $3!=6$(가지)

주의 원순열이라고 생각하여 $(3-1)!=2!=2$로 계산하면 안 돼! 이미 빵 2개를 담는 접시를 고정했기 때문에 원순열이 아니라 서로 다른 나머지 3개의 빵을 담는 경우의 수로 순열을 이용해야 해.

즉, 빵을 접시 4개에 나누어 담는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$10\times6=60$(가지)이다.

2nd 조건 (나)를 만족시키도록 사탕을 담는 경우의 수를 나누어 구하자.

2개의 빵이 담긴 맨 위쪽 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 시계 반대 방향으로 각각 B, C, D라 하자.

(i) 접시 A에 사탕을 담지 않은 경우의 수

접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 2개, 1개를 나누어 담아야 한다.

즉, 세 접시에서 1개의 사탕을 담을 접시 1개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$(가지)이다.

(ii) 접시 A에 사탕을 1개 담는 경우의 수

접시 A에 사탕이 이미 하나 담긴 경우이므로 나머지 사탕 4개를 나누는 경우만 생각하면 돼.

i) 접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 2개, 0개를 나누어 담는 경우의 수는 세 접시에서 사탕 2개씩 담을 접시 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_2=3$(가지)이다.

ii) 접시 B, C, D에 같은 종류의 사탕 2개, 1개, 1개를 나누어 담는 경우의 수는 세 접시에서 2개의 사탕을 담을 1개의 접시를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$(가지)이다.

i), ii)에 의해 접시 A에 사탕을 1개 담는 경우의 수는

$3+3=6$(가지)이다.

(i), (ii)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수는

$3+6=9$(가지)이다.

3rd 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 경우의 수를 구하자.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$60\times9=540$(가지)이다.

원순열 개념·공식

① 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.

② 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

29 정답 120 *같은 것이 있는 문자의 나열 [정답률 43%]

정답 공식: n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

1st 숫자 1, 2, 3을 중복을 허락하여 뽑을 때, 조건 (가)를 만족시키기 위한 조건을 구하자.

조건 (가)를 만족시키도록 먼저 1, 2, 3을 각각 하나씩 뽑고, 나머지 뽑은 세 수를 a, b, c라 하자.

그럼, 뽑은 6개의 수는 1, 2, 3, a, b, c (a, b, c는 3 이하의 자연수)이므로 $a+b+c$의 값의 범위를 구하면

$3\le a+b+c\le 9$ ⋯ ㉠

$a+b+c$는 $a=b=c=1$일 때 3을 최솟값으로 갖고, $a=b=c=3$일 때 9를 최댓값으로 가지지.

2nd 조건 (나)를 만족시키는 나머지 세 수 a, b, c를 이용하여 경우의 수를 구하자.

㉠의 각 변에 $1+2+3$을 더하면

$9\le 1+2+3+a+b+c\le 15$

조건 (나)에 의해 6개의 수의 합이 4의 배수가 되려면

$1+2+3+a+b+c=12$인 경우밖에 없다.

즉, $a+b+c=6$이다.

1, 2, 3에서 세 개를 선택해 합이 6이 되게 하는 경우는 a, b, c가 1, 2, 3 또는 2, 2, 2인 경우 두 가지뿐이야.

(i) a, b, c가 1, 2, 3인 경우

6개의 숫자는 1, 1, 2, 2, 3, 3이고 이를 일렬로 나열하는 경우의수는

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=90$(가지)

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

(ii) a, b, c가 2, 2, 2인 경우

6개의 숫자는 1, 2, 2, 2, 2, 3이고 이를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=30$(가지)

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$90+30=120$(가지)이다.

같은 것이 있는 순열 개념·공식

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, 이들 n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

30 정답 45 *순열과 조합을 이용한 함수의 개수 [정답률 15%]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여

다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\longrightarrow X$의 개수를 구하시오. (4점)

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

단서1 이 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 증가함수라는 것을 알 수 있어. 그런데 $f(x_1)\le f(x_2)$에서 등호가 포함되어 있으니까 중복을 허락한다는 것을 기억하자.

(나) $f(2)\ne1$이고 $f(4)\times f(5)<20$이다.

단서2 $f(2)\ne1$인 경우는 $f(2)=2, 3, 4, 5$이고 $f(4)\times f(5)<20$도 너무 많은 경우로 나누어 지니까 이럴 때는 조건 (나)를 부정. 즉, 전체 함수에서 만족시키지 않는 함수들을 빼는 게 훨씬 쉬워.

오H 2등급? 조건 (나)를 조금이나마 간단하게 접근하려면 ① 조건의 부정으로 접근하고, ② 그 부정을 여러 경우를 나눠서 풀어야 하기 때문에 까다로운 문제이다.

단서+발상

단서1 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$가 성립하므로 이후 조건에서 몇 개의 함숫값들이 확정되면 중복조합으로 문제의 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 셀 수 있다. 유형

단서2 조건 (나)의 부정은 $f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$으로, $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이기 때문에 조건 (나)의 부정이 가능한 경우가 제시된 조건 (나)에 비해 적다. 발상

따라서 여사건을 이용하여 조건 (나)를 해석한다면 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 비교적 쉽게 구할 수 있다. 해결

주의 조건 (나)을 여사건으로 해석한 경우에는 $f(4)\times f(5)\ge20$인 $f(4)$, $f(5)$의 값을 구할 때 조건 (가)의 $f(4)\le f(5)$가 성립하도록 $f(4)$, $f(5)$의 값을 구해 주어야 한다.

또한, $f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$을 만족시키는 함수의 개수는

$\{f(2)=1$인 함수의 개수$\}+\{f(4)\times f(5)\ge20$인 함수의 개수$\}$

$-\{f(2)=1$과 $f(4)\times f(5)\ge20$을 모두 만족시키는 함수의 개수$\}$

인 것에 유념해야 한다.

(핵심 정답 공식: ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$)

[문제 풀이 순서]

1st 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수를 구하자.

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여

조건 (가)를 만족시키는 함수 $f: X\longrightarrow X$의 개수는

일반적으로 함수 $f: X\longrightarrow Y$에 대하여 $n(X)=x$개, $n(Y)=y$개일 때, 함수의 개수는 ${}_y\Pi_x$야.

${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

2nd 조건 (나)를 부정하는 함수의 개수를 구하자.

$f(2)\ne1$이고 $f(4)\times f(5)<20$의 부정은 $f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$ ⋯ ㉠

$p: f(2)\ne1$, $q: f(4)\times f(5)<0$이라 놓으면 $\sim p: f(2)=1$, $\sim q: f(4)\times f(5)\ge0$이므로 p이고 q의 부정은 $\sim p$ 또는 $\sim q$가 돼.

(i) $f(2)=1$인 경우

$f(1)=1$이고 $1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le5$이므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5의 5개 중에서 중복을 허락하여 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$에 대응되는 3개를 뽑는 중복조합의 수야.

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ii) $f(4)\times f(5)\ge20$인 경우

i) $f(4)=4$, $f(5)=5$일 때

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le4$이므로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

ii) $f(4)=5$, $f(5)=5$일 때

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le5$이므로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

i), ii)에 의하여 $f(4)\times f(5)\ge20$인 함수 f의 개수는 $20+35=55$

(iii) $f(2)=1$이고 $f(4)\times f(5)\ge20$인 경우

주의 $f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$ ⋯ ㉠의 개수는 '또는'으로 연결된 합집합의 원소의 개수이므로 교집합, 즉, 공통으로 중복되는 경우의 수를 빼는 것을 잊지 말아야 해.

i) $f(1)=1$이고 $f(4)=4$, $f(5)=5$일 때

$f(2)=1$이고 조건 (가)에서 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이어야 하므로 $f(1)=1$밖에 될 수 없어.

$1\le f(3)\le4$에서 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

ii) $f(1)=1$이고 $f(4)=5$, $f(5)=5$일 때

$1\le f(3)\le5$에서 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

i), ii)에 의하여 $f(2)=1$이고 $f(4)\times f(5)\ge20$인 함수 f의 개수는

$4+5=9$

[유한집합의 원소의 개수]

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(i), (ii), (iii)에 의하여 ㉠을 만족시키는 함수 f의 개수는 $35+55-9=81$

3rd 두 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하자.
따라서 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 조건 (가)를 만족시키는 전체 함수의 개수에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수의 개수를 빼면 되므로
$126-81=45$이다.

다른 풀이: $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값에 따라 조건을 만족시키는 함수 f의 개수 구하기

조건 (가)에 의하여 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$이고
조건 (나)에 의하여 $f(2)\ne 1$, $f(4)\times f(5)<20$이지?

(i) $f(4)=5$일 때,
$f(5)=5$이어야 하는데 이것은 조건 (나)를 만족시키지 않아.
$f(4)\times f(5)=5\times 5=25>20$이지?
따라서 $f(4)=5$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않아.

(ii) $f(4)=4$일 때,
$f(5)=4$이어야 하므로 $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 1가지야.
$f(5)=5$이면 $f(4)\times f(5)=4\times 5=20$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $f(5)=4$이어야 해.
i) $f(2)=2$이면 $1\le f(1)\le 2$이어야 하므로 $f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 2가지야.
또, $2\le f(3)\le 4$이어야 하므로 $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는 3가지야.
따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
$2\times 3=6$(가지)야.
ii) $f(2)=3$이면 $1\le f(1)\le 3$이어야 하므로 $f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 3가지야.
또, $3\le f(3)\le 4$이어야 하므로 $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는 2가지야.
따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
$3\times 2=6$(가지)야.
iii) $f(2)=4$이면 $1\le f(1)\le 4$이어야 하므로 $f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 4가지야.
또, $f(3)=4$이어야 하므로 $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는 1가지야.
따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
$4\times 1=4$(가지)야.
i)~iii)에 의하여 $f(4)=4$를 만족시키는 함수 f의 개수는
$1\times(6+6+4)=16$이야.

(iii) $f(4)=3$일 때,
$3\le f(5)\le 5$이어야 하므로 $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 3가지야.
i) $f(2)=2$이면 $1\le f(1)\le 2$이어야 하므로 $f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 2가지야.
또, $2\le f(3)\le 3$이어야 하므로 $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는 2가지야.
따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
$2\times 2=4$(가지)야.
ii) $f(2)=3$이면 $1\le f(1)\le 3$이어야 하므로 $f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 3가지야.
또, $f(3)=3$이어야 하므로 $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는 1가지야.
따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
$3\times 1=3$(가지)야.
i), ii)에 의하여 $f(4)=3$을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\times(4+3)=21$이야.

(iv) $f(4)=2$일 때,
$2\le f(5)\le 5$이어야 하므로 $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 4가지야.
또, $f(2)=2$, $f(3)=2$이어야 하고 $1\le f(1)\le 2$이어야 하므로
$f(2)\ne 1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면 $f(2)=2$여야 해.
$f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 2가지야.
따라서 $f(4)=2$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $4\times 2=8$이야.

(v) $f(4)=1$일 때,
$f(2)=1$이어야 하는데 이것은 조건 (나)를 만족시키지 않아.
따라서 $f(4)=1$을 만족시키는 함수 f는 존재하지 않아.
(i)~(v)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$0+16+21+8+0=45$야.

My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략

여사건을 사용하는 게 더 효율적이라고 판단되는 경우는 이 문제의 조건 (나)처럼 조건에 의해 가능한 경우의 수가 적게 줄어드는 경우이거나 주어진 조건이 'a 또는 b'와 같이 합집합으로 주어졌을 때가 많아.

순열과 조합의 수를 이용한 함수의 개수 개념·공식

일반적으로 함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 $n(X)=x$, $n(Y)=y$일 때,
① 함수의 개수 : ${}_y\Pi_x$
② $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$인 함수의 개수 : ${}_yP_x$
③ $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$인 함수의 개수 : ${}_yC_x$
④ $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$인 함수의 개수 : ${}_yH_x$

1회

선택과목: 미적분

23 정답 ④ $*\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 [정답률 93%]

(**정답 공식:** 분모, 분자를 n^2으로 나눠서 $\frac{1}{\infty} \longrightarrow 0$임을 이용한다.)

1st 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{n^2+1}$에서
분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

2nd 극한값을 구해.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로 극한값의 성질에 의해서
모든 항이 수렴하면 합, 차, 곱 등의 형태로 이루어져 있어도 각 항의 극한값을 대입할 수 있어.
구하는 극한값은
$\frac{6+0-0}{1+0}=6$

쉬운 풀이: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 분모, 분자의 최고차항을 비교하여 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자의 최고차항을 비교하면
분모의 최고차항은 n^2, 분자의 최고차항은 $6n^2$이야.
따라서 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2}=6$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값의 계산 개념·공식

① (분자의 차수)>(분모의 차수) : ∞ 또는 $-\infty$로 발산
② (분자의 차수)=(분모의 차수) : $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 수렴
③ (분자의 차수)<(분모의 차수) : 0으로 수렴

24 정답 ② *수열의 극한의 대소 관계 [정답률 92%]

(**정답 공식:** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 수렴할 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.)

1st 구하는 값을 확인하여 부등식을 변형하자.

구하는 극한값이 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$이므로
부등식 $3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$의 각 변에
$\frac{1}{3^{n+1}+2^n}$을 곱하자. → 양수이므로 곱해도 부등호 방향은 바뀌지 않아.
따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}<\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}<\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}$$

→ 분모의 항 중에서 밑이 가장 큰 3^n으로 분모와 분자를 나누어 계산하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$을 이용하여 극한값을 구할 수 있어.

2nd 극한값을 구해.

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}=\frac{1}{3}$이므로
수열의 극한값의 대소 관계에 의해

→ [수열의 극한값의 대소 관계]
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때,
(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$
(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

$$\frac{1}{3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}\le\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}=\frac{1}{3}$$

25 정답 ③ $*\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서의 미정계수의 결정 [정답률 81%]

(**정답 공식:** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.)

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 설정해.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

일반항 $a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$이고, $a_{2n}=2dn+a-d$이다.

2nd 주어진 극한값을 통해 a_2-a_1의 값을 구해.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}$에 a_n, a_{2n}을 각각 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2dn+a-d-6n}{dn+a-d+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2d-6)n+(a-d)}{dn+(a-d+5)}$$

분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 계산해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2d-6+\frac{a-d}{n}}{d+\frac{a-d+5}{n}}=\frac{2d-6}{d}=4$$

$2d-6=4d$, $2d=-6$ $\quad\therefore d=-3$

따라서 구하는 $a_2-a_1=d=-3$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$

톡톡 풀이: 등차수열의 일반항이 n에 관한 일차식임을 이용하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 n에 관한 일차식이므로

$a_n=an+b$라 하면 $a_{2n}=2an+b$이고,

$a_2-a_1=(2a+b)-(a+b)=a$이므로 구하는 값은 a야.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-6)n+b}{an+(b+5)}$$

$$=\frac{2a-6}{a}=4$$

$\therefore a=-3$

26 정답 ⑤ $*$수열의 극한의 성질을 이용한 극한값의 계산 [정답률 76%]

(**정답 공식:** 수열이 수렴할 때 성립하는 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.)

1st 먼저 문제에서 묻는 극한의 식을 정리해.

주어진 조건을 이용하기 위해 구하는 극한식을 a_n, a_n+b_n에 관한 식으로 정리하자.

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(2a_n+2b_n-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{2(2n^2+1)(a_n+b_n)-(2n^2+1)a_n\}\ \cdots ㉠$$

2nd 각각에 해당하는 극한값을 구해.

$\lim\limits_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}2(2n^2+1)(a_n+b_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(4n^2+1)(a_n+b_n)\times\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}$$

분모, 분자의 최고차항의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 최고차항의 계수의 비를 구해.

$$=1\times\frac{4}{4}=1\ \cdots ㉡$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1)a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(n^2+1)a_n\times\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+1}$$

$$=3\times\frac{2}{1}=6\ \cdots ㉢$$

따라서 ㉠의 극한값은 ㉡, ㉢에 의하여

$1-6=-5$이다.

각각의 극한값이 수렴하기 때문에 극한값의 차로 계산할 수 있어.

수열의 극한값의 성질 개념·공식

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α, β는 상수)일 때,

① $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\pm\beta$ (복호동순)

③ $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

27 정답 ① $*a_n$과 S_n의 관계를 이용한 수열의 극한 [정답률 69%]

(**정답 공식:** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$이다.)

1st 등차수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구해.

$a_1=3$, $a_2=-4$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$에 $n=1$, $n=2$를 각각 대입하면

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{6}{1+1}$에서 $\frac{3}{b_1}=3$ $\quad\therefore b_1=1$

$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{6}{2+1}$에서

주의 $n=2$를 대입할 때 좌변이 $\frac{a_2}{b_2}$가 아니라 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}$임을 실수하지 않도록 주의해.

$3+\frac{-4}{b_2}=2$ $\quad\therefore b_2=4$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n=3n-2$이다.

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 $b_1=1$이고 공차가 $b_2-b_1=4-1=3$이므로 일반항 $b_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

2nd 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해.

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의해 $n\ge2$일 때

$$\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=-\frac{6}{n(n+1)}$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\ge2)$

따라서 $a_n=-\frac{6b_n}{n(n+1)}=\frac{-6(3n-2)}{n(n+1)}$ $(n\ge2)$이다.

3rd $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$의 값을 구해.

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-6(3n-2)^2}{n(n+1)}=-6\times3^2=-54$$

분모, 분자의 최고차항의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 최고차항의 계수의 비를 구해.

수열의 합과 일반항 사이의 관계 개념·공식

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\ge2)\end{cases}$$

28 정답 ② $*$등비수열의 극한 [정답률 52%]

(**정답 공식:** 주어진 조건을 이용하여 도형의 길이와 넓이를 n에 대한 식으로 나타내고 a의 값의 범위를 나누어 극한값을 구한다.)

1st 두 점 A_n, B_n의 좌표를 구해.

직선 $y=n$이 y축과 만나는 점 A_n의 좌표는 $\mathrm{A}_n(0,\ n)$이고

점 B_n의 x좌표를 구하기 위해 직선 $y=n$과 곡선 $y=\log_a(x-1)$을 연립하면

$n=\log_a(x-1)$에서 $x=a^n+1$

즉, 점 B_n의 좌표는 $\mathrm{B}_n(a^n+1,\ n)$

2nd $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}$, S_n의 식을 각각 구해.

또한, 두 점 A_{n+1}, B_{n+1}의 좌표는 각각 두 점 A_n, B_n의 좌표에 n 대신 $n+1$을 대입해서 구하면 $\mathrm{A}_{n+1}(0,\ n+1)$, $\mathrm{B}_{n+1}(a^{n+1}+1,\ n+1)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}=\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1^2}$이다.

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$이 서로 평행한 사다리꼴이고

높이는 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=(n+1)-n=1$이므로 두 직선은 각각 x축에 평행해.

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}})\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\times(a^{n+1}+a^n+2)\times1$$

$$=\frac{a^{n+1}+a^n+2}{2}$$

3rd 모든 a의 값의 합을 구해.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}}{\frac{a^{n+1}+a^n+2}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}}{a^{n+1}+a^n+2}=\frac{3}{2a+2}$$

위 식을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 나누어 구하자.

(i) $0<a<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}}{a^{n+1}+a^n+2}=\frac{2\sqrt{1}}{2}=1=\frac{3}{2a+2}$$

$2a+2=3$, $2a=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

[등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산]
(1) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)
(2) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)
(3) $-1<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)
(4) $r\le-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n$은 발산한다.

(ii) $a>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$이므로 분모, 분자를 각각 a^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}}{a^{n+1}+a^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{a+1+\frac{2}{a^n}}$$

$a>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=a-1$

$$=\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$$

$\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$의 양변에 $2(a+1)$을 곱하면

$4(a-1)=3$, $4a=7$에서 $a=\frac{7}{4}$

(i), (ii)에 의하여 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$이다.

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴·발산 개념·공식

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)
② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)
③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)
④ $r\le-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n$은 진동 (발산)

29 정답 50 ＊$\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 활용 [정답률 31%]

(정답 공식: 무리식이 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 유리화하여 극한값을 구한다.)

1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해.

부등식 $x^2-4nx-n<0$을 완전제곱식의 형태로 정리하면

$x^2-4nx+4n^2<n+4n^2$, $(x-2n)^2<4n^2+n$

따라서 부등식의 해는 $x^2<a\ (a>0)$이면 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$

$-\sqrt{4n^2+n}<x-2n<\sqrt{4n^2+n}$에서 $2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$ … ㉠

이때, 자연수 n에 대하여 $\sqrt{4n^2+n}$의 값은

$\sqrt{4n^2}<\sqrt{4n^2+n}<\sqrt{4n^2+4n+1}$에서

$2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$이므로 $\sqrt{(2n+1)^2}=2n+1$

㉠에서 $-1<2n-\sqrt{4n^2+n}<0$이고 $4n<2n+\sqrt{4n^2+n}<4n+1$

즉, ㉠을 만족시키는 정수 x는

$0, 1, 2, 3, \cdots, 4n$이 되어 그 개수인 $a_n=4n+1$이다.

2nd $100pq$의 값을 구해.

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$에 $a_n=4n+1$을 대입한

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn)=q$의 값이 존재하려면

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+n}=\infty$이므로 $p>0$이어야 한다. → $\infty-\infty$ 꼴

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn)=q$를 유리화하기 위해

좌변의 분모, 분자에 각각 $\sqrt{4n^2+n}+pn$을 곱하면
근호를 포함한 쪽을 유리화해.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-p^2n^2}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=q$$

이때, $p^2\ne4$이면 (분자의 차수)>(분모의 차수)가 되어

극한값은 존재하지 않으므로 $p^2=4$ $p^2\ne4$이면 (분자의 차수)=2, (분모의 차수)=1이 되어 극한은 발산해.

$p>0$이므로 $p=2$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-p^2n^2}{\sqrt{4n^2+n}+pn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

분모, 분자의 최고차항의 차수가 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 최고차항의 계수의 비를 구해.

$$=\frac{1}{2+2}$$

$$=\frac{1}{4}=q$$

$\therefore 100pq=100\times2\times\frac{1}{4}=50$

극한값의 계산 개념·공식

① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분수식의 극한 ⇒ 분모의 최고차항(계수는 제외)으로 약분
② $\infty-\infty$ 꼴의 무리식의 극한 ⇒ 유리화
③ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 등비수열이 포함된 식의 극한 ⇒ 분모에서 공비가 제일 큰 항으로 약분

30 정답 25 ＊x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수 [정답률 25%]

함수 단서1 함수 $f(x)$가 등비수열 꼴이므로 $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|<1$로 나누어서 함수식을 구해야 해.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

단서2 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축의 윗부분만 정확하게 그려도 돼.
$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. (4점)

왜 2등급? 극한의 정의를 이용하여 함수 $f(x)$를 구하고, $f(x)$를 통해 $g(x)$의 그래프를 그려서 해결하는 문제이다. 경우를 나누어서 함수를 구할 때 실수를 하기 쉬웠다.

단서+발상

단서1 $|x|>1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이고, $|x|<1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$임을 이용하여 $f(x)$의 함수를 구한다. 개념

단서2 함수 $g(x)$의 그래프를 그릴 때에도 $f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$에서 $\frac{x}{2k-1}$의 값의 경우를 나누어야 한다.
$\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$, $\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$, $\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$의 세 가지 경우로 나누어 구하면 된다. 적용
여기서 $g(x)$의 값이 0과 10 사이에 있는 구간을 정확히 구하고 가능한 t의 값을 찾는다. 해결

주의 함수 $g(x)$의 그래프를 그릴 때 불연속인 지점에서의 함숫값을 정확하게 나타낸다.

(핵심 정답 공식: x의 값의 범위에 따라 $f(x)$의 함수식이 달라지는 점을 고려하여 함수 $f(x)$를 구하고, 새롭게 정의된 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.)

[문제 풀이 순서]

1st $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|<1$일 때로 구분하여 $f(x)$의 함수식을 구해.

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$는 x의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로 분모, 분자를 각각 x^{2n}으로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{x-0}{1+0}=x$$

(ii) $x=1$일 때

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}-1}{1^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $x=-1$일 때

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}-(-1)}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1+1}{1+1}=0$$

(iv) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\frac{0-x}{0+1}=-x$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}x & (|x|>1)\\ 0 & (|x|=1)\\ -x & (|x|<1)\end{cases}$$

2nd 조건에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려.

함수 $g(x)$는 자연수 k에 대해 $2k-2\le|x|<2k$에서

$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$이다.

이때, $f(x)$의 함수식이 $|x|=1$을 기준으로 바뀌므로

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$, $\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$, $\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$이 될 때로 나누어서

$g(x)$의 함수식을 구해야 한다.

(a) $2k-2\le|x|<2k-1$일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$이므로

주의 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=t$와 만나는 점이 있는지를 결정하는 중요한 역할을 하니까 등호가 어느 쪽에 붙어 있는지를 잘 파악하고 있어야 해.

$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$ → $f(x)=-x$에 대입해야 해.

$=(2k-1)\times\left(-\frac{x}{2k-1}\right)=-x$

(b) $|x|=2k-1$일 때

$\left|\dfrac{x}{2k-1}\right|=1$이므로

$g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$

$=(2k-1)\times 0=0$

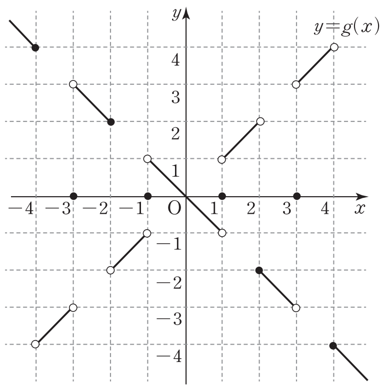
(c) $2k-1<|x|<2k$일 때

$\left|\dfrac{x}{2k-1}\right|>1$이므로

$g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$

$=(2k-1)\times\dfrac{x}{2k-1}=x$

(a), (b), (c)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



3rd 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구해.

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는 t의 값을 그림을 보고 작은 값부터 구하면 1, 3, 5, 7, 9이다.

따라서 모든 t의 값의 합은 $1+3+5+7+9=25$이다.

그래프를 보면 정수 p에 대하여 $t=2p-1$일 때만 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않아.

My Top Secret 서울대 선배의 ❶ 등급 대비 전략

함수 $g(x)$의 그래프를 그려보면 함수가 규칙성을 가진다는 것을 확인할 수 있어. x의 값이 0이 아닌 정수일 때 함수 $g(x)$가 불연속이기 때문에 이 부분들을 집중적으로 살펴보면 실수 t로 가능한 값은 홀수인 1, 3, 5, 7, 9가 돼!

x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수 개념·공식

(1) 함수 $f(x)$가 x^n이 포함된 극한으로 정의된 경우 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $x=1$, $|x|<1$, $x=-1$로 나누어서 각각의 극한값을 구한다. 각 범위를 정의역으로 하고 극한값을 치역으로 하여 함수를 구한다.

(2) r^n을 포함한 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 문제는 r의 값의 범위를 $|r|>1$, $r=1$, $|r|<1$, $r=-1$로 나누어 푼다.

선택과목: 기하

23 정답 ⑤ *타원의 초점과 단축, 장축 [정답률 93%]

(**정답 공식**: 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 장축과 단축의 길이는 각각 $2a$, $2b$이다.)

1st 주어진 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$에서 장축의 길이는 $2a$임을 이용하자.

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$에서

$\sqrt{16}>\sqrt{5}>0$이므로 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.

$\sqrt{16}=4$

주의
타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $a>b>0$인지 $b>a>0$인지 먼저 체크해야 해.
$a>b>0$일 때는 장축의 길이가 $2a$이지만 $b>a>0$일 때는 장축의 길이가 $2b$로 다르기 때문이야.

타원의 장축의 길이와 단축의 길이 개념·공식

① 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 장축의 길이와 단축의 길이는 각각 $2a$, $2b$이다.

② 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$의 장축의 길이와 단축의 길이는 각각 $2b$, $2a$이다.

24 정답 ① *포물선의 정의 및 방정식 [정답률 89%]

(**정답 공식**: 포물선 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)의 초점은 $\mathrm{F}(0, p)$, 준선의 방정식은 $y=-p$이다.)

1st 포물선의 초점과 준선을 구하여 초점과 준선 사이의 거리를 구하자.

포물선 $x^2=8y=4\times2\times y$이므로 초점의 좌표는 $(0, 2)$이고

준선의 방정식은 $y=-2$이다.

따라서 초점과 준선 사이의 거리는 $2\times2=4$이다.

포물선의 정의에 의해 초점에서 꼭짓점 사이의 거리와 꼭짓점에서 준선 사이의 거리가 같음을 이용한 거야.

포물선의 방정식 개념·공식

① 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)
② 초점이 $\mathrm{F}(0, p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

25 정답 ③ *쌍곡선의 정의 및 방정식 [정답률 73%]

(**정답 공식**: 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.)

1st 쌍곡선의 방정식을 구하자.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 중심의 좌표는 $(0, 0)$이고

한 초점이 $\mathrm{F}(3, 0)$이므로 $a^2+b^2=9$ ⋯ ㉠

또한, 주축의 길이가 4이므로 $2a=4$에서 $a=2$

쌍곡선의 방정식이 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 꼴인 경우에는 주축의 길이가 $2|a|$이고, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 꼴인 경우에는 주축의 길이가 $2|b|$야.

이것을 ㉠에 대입하면

$4+b^2=9$ $\quad\therefore b^2=5$

쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$이다.

2nd 직선 l의 방정식을 구하고, 초점과 직선 l 사이의 거리를 구하자.

이 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$이다.

점근선 중 기울기가 양수인 것이 직선 l이므로

$l: y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ $\quad 2y=\sqrt{5}x$, $\sqrt{5}x-2y=0$

따라서 점 $\mathrm{F}(3, 0)$과 직선 $l: \sqrt{5}x-2y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\sqrt{5}-0|}{\sqrt{5+4}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$이다.

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

쌍곡선의 방정식 개념·공식

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(단, $c>a>0$)에 대하여
① 꼭짓점의 좌표 : $(a, 0)$, $(-a, 0)$
② 주축의 길이(두 초점까지의 거리의 차) : $2a$
③ 초점의 좌표 : $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (단, $c=\sqrt{a^2+b^2}$)
④ 점근선의 방정식 : $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

26 정답 ② *포물선의 평행이동 [정답률 75%]

정답 공식: 포물선 $(y-n)^2=4p(x-m)$은 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $(p+m, n)$이다.

1st 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 정리하여 초점의 좌표부터 구하자.

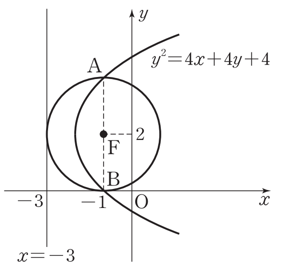
포물선 $y^2=4x+4y+4$ ⋯ ㉠를 표준형으로 정리하면

$y^2-4y+4=4x+8$ $\quad\therefore (y-2)^2=4(x+2)$

즉, 포물선 $(y-2)^2=4(x+2)$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $(-1, 2)$이다.

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표가 $(1, 0)$이고, 이것을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1-2, 0+2)=(-1, 2)$가 돼.

2nd 두 점 A, B의 좌표를 구하여 $a+b+c+d$의 값을 계산하자.



초점 $(-1, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하므로 원의 중심을 F라 하면 $\overline{AF}=\overline{BF}=2$이므로 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$와 포물선의 준선

점 F는 포물선에 있어서는 초점이니 포물선의 정의에 따라 준선까지의 거리와 같은 값을 가지지.

$x=-3$까지의 거리도 모두 2이다.

즉, $a-(-3)=c-(-3)=2$ $\quad\therefore a=c=-1$

교점 A, B의 x좌표가 -1이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$y^2=-4+4y+4$

$y(y-4)=0$ $\quad\therefore y=0$ 또는 $y=4$

따라서 $A(-1, 4)$, $B(-1, 0)$이므로

$a+b+c+d=-1+4+(-1)+0=2$

포물선의 평행이동 (개념·공식)

① 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2=4p(x-m)$이다. 또한, 초점은 $(p+m, n)$이고 준선은 $x=-p+m$이다.

② 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(x-m)^2=4p(y-n)$이다. 또한, 초점은 $(m, p+n)$이고 준선은 $y=-p+n$이다.

27 정답 ④ *쌍곡선의 초점과 주축의 길이 [정답률 52%]

정답 공식: 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 주축의 길이는 $2|b|$이다.

1st 쌍곡선의 정의에서 식을 유도하자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$에서 주축의 길이는 $2\times\sqrt{4}=4$이다.

실수: 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$에서 우변의 상수가 1이 아닌 -1이므로 주축의 길이는 $2\times\sqrt{4}$야. 습관적으로 $2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$을 구하면 안 돼.

제1사분면 위의 점 P에서는 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이므로

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$ $\quad\therefore \overline{PF'}=\overline{PF}+4$ ⋯ ㉠

또한, 제3사분면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{QF}>\overline{QF'}$이므로

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{QF}-\overline{QF'}=4$ $\quad\therefore \overline{QF'}=\overline{QF}-4$ ⋯ ㉡

2nd 식을 정리하여 $\overline{PF}$, $\overline{QF}$의 값을 각각 구하고 그 합을 계산하자.

㉠, ㉡을 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=5$에 대입하면 $(\overline{PF}+4)-(\overline{QF}-4)=5$

$\therefore \overline{PF}-\overline{QF}=-3$ ⋯ ㉢

또, $\overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{QF}$이므로 이것을 ㉢에 대입하면 $\frac{2}{3}\overline{QF}-\overline{QF}=-3$

$-\frac{1}{3}\overline{QF}=-3$ $\quad\therefore \overline{QF}=9$, $\overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{QF}=\frac{2}{3}\times9=6$

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF}=6+9=15$

28 정답 ④ *타원과 삼각비의 활용 [정답률 38%]

정답 공식: 삼각형 ABC에서 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$가 성립하고 이를 코사인법칙이라고 한다.

1st 타원 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 합은 장축의 길이로 일정하지.

두 타원 C_1, C_2 위의 점 P에 대하여 각각 타원의 정의에 의해

타원 위의 한 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같아.

$\overline{PF}+\overline{PF'}=6$ ⋯ ㉠, $\overline{PA}+\overline{PF'}=6$

두 식을 연립하면 $\overline{PF}=\overline{PA}$이므로

삼각형 PFA는 이등변삼각형이다.

점 P에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\cos(\angle AFP)=\frac{\overline{FH}}{\overline{PF}}=\frac{3}{8}$이므로 $\overline{PF}=8k(k>0)$ ⋯ ㉡라 하면

$\overline{FH}=3k$이고 $\overline{FA}=2\overline{FH}=6k$이다.

2nd 삼각형 PFF′의 변의 길이와 각의 크기를 파악하자.

㉠에 의하여

$\overline{PF'}=6-\overline{PF}=6-8k$ ($\because$ ㉡) ⋯ ㉢

또한, 점 A의 x좌표가 3이므로

$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{FA}=3-6k$

$\therefore \overline{FF'}=2\overline{OF}=2(3-6k)=6-12k$ ⋯ ㉣

또한, $\angle PFF'=\pi-\angle AFP$이므로

$\cos(\angle PFF')=\underbrace{\cos(\pi-\angle AFP)}_{\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta}=-\cos(\angle AFP)=-\frac{3}{8}$ ⋯ ㉤

3rd $\overline{PF'}$, $\overline{PF}$, $\overline{FF'}$과 $\cos(\angle PFF')$을 알고 있으므로 삼각형 PFF′에서 코사인법칙을 이용하여 k의 값을 구할 수 있어.

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{FF'}^2-2\times\overline{PF}\times\overline{FF'}\times\cos(\angle PFF')$

$(6-8k)^2=(8k)^2+(6-12k)^2-2\times8k\times(6-12k)\times\left(-\frac{3}{8}\right)$

($\because$ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤)

$36-96k+64k^2=64k^2+36-144k+144k^2+36k-72k^2$

$72k^2-12k=0$, $12k(6k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{6}$ ($\because k>0$)

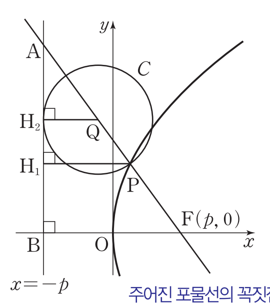
따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PA}+\overline{FA}=8k+8k+6k=22k=22\times\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

29 정답 96 *포물선의 정의와 닮음의 활용 [정답률 35%]

정답 공식: 평면 위의 한 정점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점의 집합을 포물선이라 한다. 이때, 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 준선이라 한다.

1st 직선의 기울기를 이용할 수 있는 닮은 직각삼각형을 찾아보자.



주어진 포물선의 꼭짓점이 원점이고 초점이 $F(p, 0)$이므로 준선은 $x=-p$가 되는 거야.

점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 준선 $x=-p$와 만나는 점을 A, 준선이 x축과 만나는 점을 B, 원 C의 중심을 Q라 하자.

두 점 P, Q에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

직선의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 세 직각삼각형 AH_2Q, AH_1P, ABF는

서로 AA 닮음이므로

$\angle A$는 공통이고, 평행한 선들과 직선의 동위각이 같거나 수선의 발을 내린 부분의 각이 직각임을 이용하여 AA 닮음을 확인할 수 있어.

$\overline{H_2Q}:\overline{AH_2}:\overline{AQ}=\overline{H_1P}:\overline{AH_1}:\overline{AP}=\overline{BF}:\overline{AB}:\overline{AF}=3:4:5$

직각삼각형에서 밑변의 길이가 $3k$, 높이가 $4k$이면 빗변의 길이는 $\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$이므로 $3:4:5$가 됨을 알 수 있어.

2nd 세 삼각형의 변의 길이를 p에 관한 식으로 정리하자.

$\overline{BF}=2p$이므로 $\overline{AF}=\frac{5}{3}\overline{BF}=\frac{5}{3}\times2p=\frac{10}{3}p$ ⋯ ㉠

포물선의 정의인 $\overline{PF}=\overline{PH_1}$을 이용할 수 있도록 변의 길이를 유도하자.

또한, 원 C의 반지름의 길이에 의하여 $\overline{QH_2}=\overline{PQ}=3$이므로

$\overline{AQ}=\frac{5}{3}\overline{QH_2}=\frac{5}{3}\times3=5$이고 $\overline{AP}=\overline{AQ}+\overline{QP}=5+3=8$ ⋯ ㉡

삼각형 AH_1P에서 $\overline{PH_1}=\frac{3}{5}\overline{AP}=\frac{3}{5}\times8=\frac{24}{5}$ ⋯ ㉢

3rd 포물선의 정의를 이용하여 $25p$의 값을 구하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH_1}=\frac{24}{5}$이므로

$\overline{AF}=\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH_1}$에서

$\frac{10}{3}p=8+\frac{24}{5}=\frac{64}{5}$ ($\because$ ㉠, ㉡, ㉢)

$\therefore p=\frac{64}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{96}{25}$

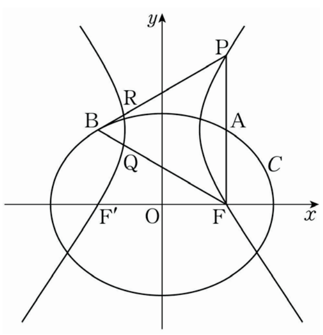
$\therefore 25p=25\times\frac{96}{25}=96$

30 정답 100 ＊타원과 쌍곡선의 정의와 삼각비의 활용 [정답률 23%]

그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자. 단서1 사각형 BF′FA는 네 각이 모두 직각이므로 직사각형이야.
두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자.
세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

단서2 정삼각형의 한 변의 길이와 높이 사이의 관계를 이용하여 식을 유도하자.
(가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
(나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.
단서3 타원 C 위의 한 점과 두 초점 사이의 거리의 합이 장축의 길이와 같음을 이용하여 식을 유도하자.

$60\times\overline{AF}$의 값을 구하시오. (4점)



왜 2등급? 타원, 쌍곡선, 정삼각형 사이의 관계들을 여러 조건들을 이용하여 파악해야 하기 때문에 까다로운 문제이다.

단서+발상

단서1 타원 C와 그 타원의 두 초점이 모두 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 y축에 대하여 대칭인 것을 알 수 있다. 따라서 사각형 BF′FA는 직사각형이다. 발상
단서2 점 A는 선분 PF의 중점이므로 선분 AB의 길이와 선분 FF′의 길이가 같다는 점을 고려한다면 두 선분 BF, AF의 길이를 c에 관한 식으로 표현할 수 있다. 발상
단서3 타원의 성질에 의하여
(타원 C의 장축의 길이)=(선분 BF의 길이)+(선분 BF′의 길이)
=(선분 AF의 길이)+(선분 AF′의 길이)이다. 개념
또한, 주어진 쌍곡선과 정삼각형은 직선 AB에 대하여 대칭이므로 삼각형 BRQ 역시 정삼각형인 것을 알 수 있다. 따라서 두 정보를 종합한다면 c의 값을 얻어낼 수 있다. 해결

주의 타원과 쌍곡선이 함께 주어진 상황인데 두 이차곡선의 초점의 x좌표가 같으므로 두 곡선의 방정식을 세우거나 이차곡선의 초점에 관한 공식을 이용할 때 헷갈리지 않도록 주의해야 한다.

핵심 정답 공식: 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$이고, $\angle ABC=\theta$이면 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$이다.

[문제 풀이 순서]

1st $\overline{AF}$, $\overline{BF}$의 길이를 c에 관한 식으로 정리하자.
두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)(c>0)$에 대하여
$\overline{FF'}=2c$이고 $\overline{FF'}=\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}=2c$ … ㉠
또한, 조건 (가)에 의해 삼각형 BFP가 정삼각형이고, $\angle BAF=90°$이므로 정삼각형 BFP의 꼭짓점 B에서 선분 FP에 내린 수선의 발은 점 A이고 ㉠에 의하여 높이가 $\overline{AB}=2c$인 정삼각형의 한 변의 길이는

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 2c=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c$
한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$인 관계가 있으므로 높이가 k인 정삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}k$가 돼.

$\therefore \overline{AF}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c$, $\overline{BF}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c$ … ㉠

2nd $\overline{AQ}$, $\overline{FQ}$의 길이를 c에 관한 식으로 정리하자.
타원 C에서 $\overline{AF}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c$, $\overline{AF'}=\overline{BF}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c$이므로
직사각형의 대각선의 길이이므로 서로 같아.
타원 C의 장축의 길이는
타원의 정의에 의해 타원 위의 한 점과 두 초점 사이의 거리의 합과 같아.
$\overline{AF}+\overline{AF'}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c=2\sqrt{3}c$
삼각형 BQR의 둘레의 길이는 $3\overline{BQ}$이고,
삼각형 BQR는 $\angle B=60°$, $\overline{BQ}=\overline{BR}$이므로 정삼각형이 돼. 그러므로 삼각형 BQR의 둘레의 길이는 $3\overline{BQ}$가 되는 거야.
조건 (나)에 의해 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차가 3이므로
$2\sqrt{3}c-3\overline{BQ}=3$
$\therefore \overline{BQ}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c-1$ … ㉡

즉, $\overline{FQ}=\overline{FB}-\overline{BQ}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c-\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c-1\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c+1$ … ㉢
또한, 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{FB}-\overline{FA}=\overline{QA}-\overline{QB}$이므로
$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c=\overline{QA}-\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c-1\right)$ (∵ ㉠, ㉡)
$\therefore \overline{QA}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c-1$ … ㉣

3rd 삼각형 QAF에서 코사인법칙을 이용하여 c의 값을 구할 수 있고, $\overline{AF}$의 길이도 구할 수 있어.
$\angle QAF=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 QAF에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{QA}^2=\overline{AF}^2+\overline{FQ}^2-2\times\overline{AF}\times\overline{FQ}\times\cos(\angle QFA)$이므로
$\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c-1\right)^2$
$=\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c+1\right)^2-2\times\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c\times\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c+1\right)\times\underbrace{\cos\dfrac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}}$
(∵ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣)
$\dfrac{16}{3}c^2-\dfrac{8}{3}\sqrt{3}c+1=\dfrac{4}{3}c^2+\dfrac{4}{3}c^2+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}c+1-\dfrac{4}{3}c^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c$
$4c^2-\dfrac{10}{3}\sqrt{3}c=0$, $4c\left(c-\dfrac{5}{6}\sqrt{3}\right)=0$
$\therefore c=\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$ (∵ $c>0$)
따라서 $\overline{AF}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}c$ (∵ ㉠)$=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\times\dfrac{5}{6}\sqrt{3}=\dfrac{5}{3}$이므로
$60\times\overline{AF}=60\times\dfrac{5}{3}=100$

My Top Secret 서울대 선배의 1 등급 대비 전략
본 문제에서 타원은 y축에 대하여 대칭이고 쌍곡선은 y축에 대하여 대칭, 직선 AB에 대하여 대칭이고 정삼각형은 직선 AB에 대하여 대칭이므로 주어진 도형들의 대칭성이 겹친다는 것을 알 수 있어. 이를 활용한다면 주어진 점들 사이의 관계를 편하게 파악할 수 있어.

타원과 쌍곡선 개념·공식

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0,\ c^2=a^2-b^2)$의
① 초점 : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$
② 장축의 길이 : $2a$
③ 단축의 길이 : $2b$
④ 타원 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합 : $2a$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0,\ c^2=b^2-a^2)$의
① 초점 : $F(0, c)$, $F'(0, -c)$
② 장축의 길이 : $2b$
③ 단축의 길이 : $2a$
④ 타원 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합 : $2b$

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(c>a>0,\ c^2=a^2+b^2)$의
① 초점 : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$
② 주축의 길이 : $2a$
③ 쌍곡선 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차 : $2a$
④ 점근선의 방정식 : $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$

(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(c>b>0,\ c^2=a^2+b^2)$의
① 초점 : $F(0, c)$, $F'(0, -c)$
② 주축의 길이 : $2b$
③ 쌍곡선 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차 : $2b$
④ 점근선의 방정식 : $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$