상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

공통수학 1

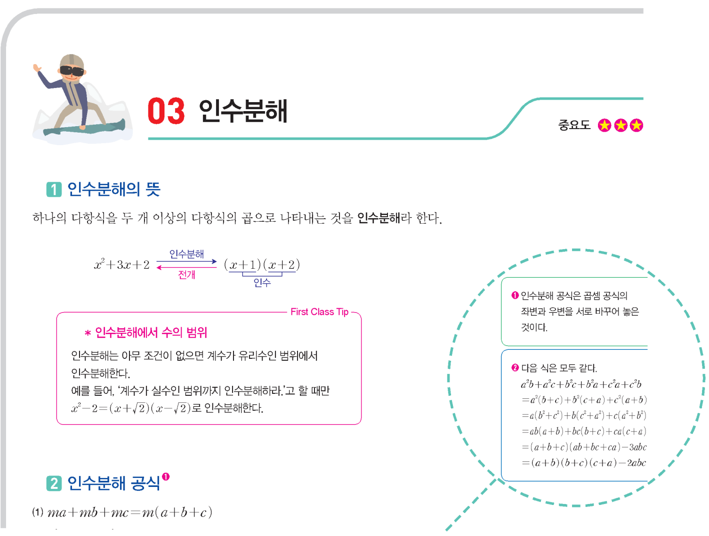
구성과 특징

학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!
일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도** ★★★
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.



03 인수분해

중요도 ★★★

1 인수분해의 뜻

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 **인수분해**라 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \underbrace{(x+1)(x+2)}_{\text{인수}}$$

First Class Tip

* 인수분해에서 수의 범위

인수분해는 아무 조건이 없으면 계수가 유리수인 범위에서 인수분해한다.
예를 들어, '계수가 실수인 범위까지 인수분해하라.'고 할 때만 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$로 인수분해한다.

2 인수분해 공식❶

(1) $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

❶ 인수분해 공식은 곱셈 공식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓은 것이다.

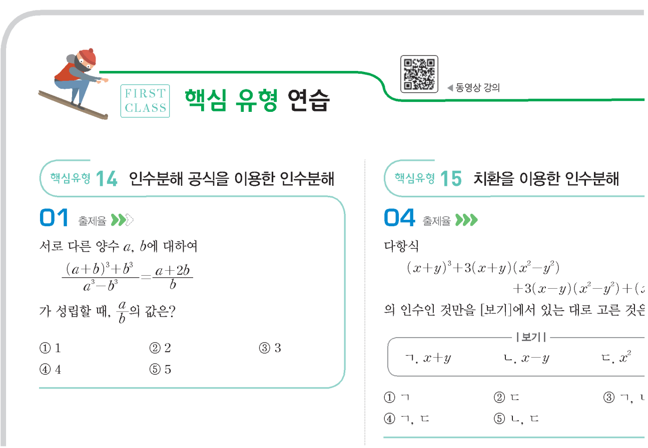
❷ 다음 식은 모두 같다.
$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$
$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$
$=(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$

공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 → 유제 → 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

- 출제율 ≫
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.



FIRST CLASS 핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 14 인수분해 공식을 이용한 인수분해

01 출제율

서로 다른 양수 a, b에 대하여

$$\frac{(a+b)^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{a+2b}{b}$$

가 성립할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

핵심유형 15 치환을 이용한 인수분해

04 출제율

다항식

$(x+y)^3+3(x+y)(x^2-y^2)$
$+3(x-y)(x^2-y^2)+($

의 인수인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은

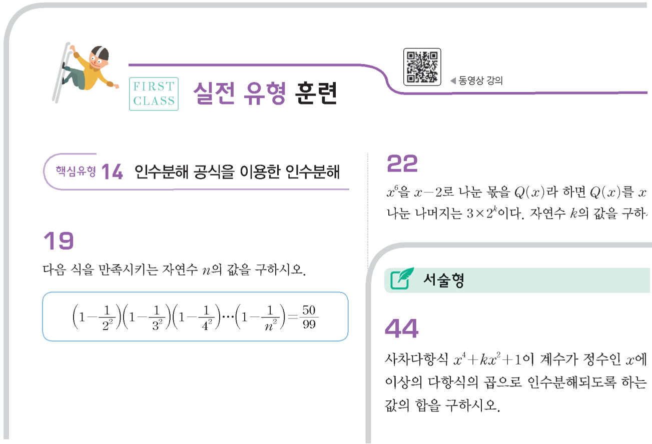
| 보기 |
ㄱ. $x+y$ ㄴ. $x-y$ ㄷ. x^2

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- **서술형**
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.



FIRST CLASS 실전 유형 훈련

◀동영상 강의

핵심유형 14 인수분해 공식을 이용한 인수분해

19
다음 식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{50}{99}$$

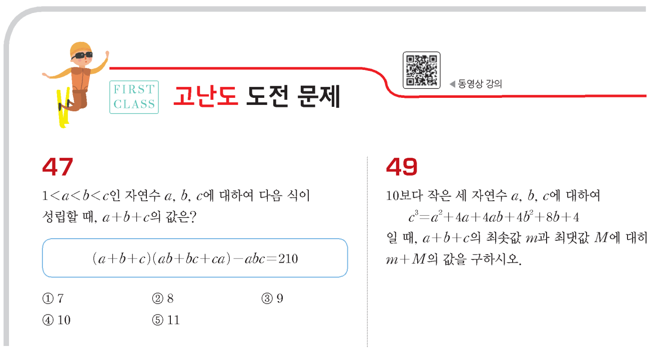
22
x^6을 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 $Q(x)$를 x
나눈 나머지는 3×2^k이다. 자연수 k의 값을 구하

서술형

44
사차다항식 x^4+kx^2+1이 계수가 정수인 x에
이상의 다항식의 곱으로 인수분해되도록 하는
값의 합을 구하시오.

4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.



FIRST CLASS 고난도 도전 문제

◀동영상 강의

47
$1<a<b<c$인 자연수 a, b, c에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=210$$

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

49
10보다 작은 세 자연수 a, b, c에 대하여

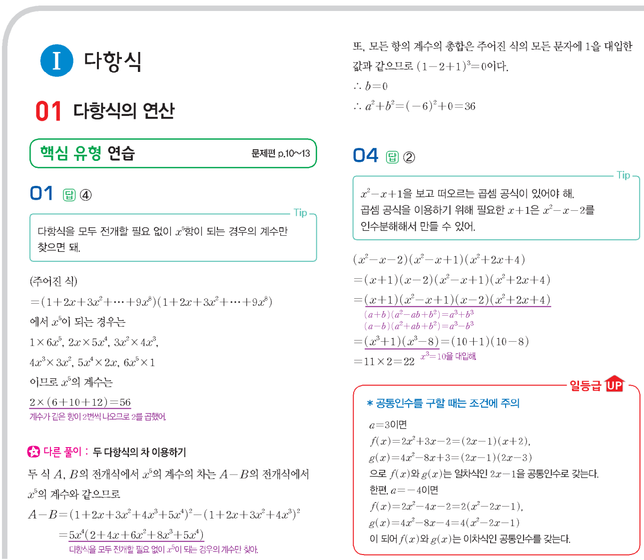
$$c^3=a^2+4a+4ab+4b^2+8b+4$$

일 때, $a+b+c$의 최솟값 m과 최댓값 M에 대히
$m+M$의 값을 구하시오.

5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- **Tip**
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- **다른 풀이**
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- **일등급 UP**
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.



I 다항식

01 다항식의 연산

핵심 유형 연습 문제편 p.10~13

01 답 ④

Tip
다항식을 모두 전개할 필요 없이 x^5항이 되는 경우의 계수만 찾으면 돼.

(주어진 식)
$=(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)$
에서 x^5이 되는 경우는
$1\times6x^5$, $2x\times5x^4$, $3x^2\times4x^3$,
$4x^3\times3x^2$, $5x^4\times2x$, $6x^5\times1$
이므로 x^5의 계수는
$\underbrace{2\times(6+10+12)=56}_{\text{계수가 같은 항이 2번씩 나오므로 2를 곱했어.}}$

다른 풀이 : 두 다항식의 차 이용하기
두 식 A, B의 전개식에서 x^5의 계수의 차는 $A-B$의 전개식에서 x^5의 계수와 같으므로
$A-B=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2-(1+2x+3x^2+4x^3)^2$
$\quad=\underbrace{5x^4(2+4x+6x^2+8x^3+5x^4)}_{\text{다항식을 모두 전개할 필요 없이 }x^5\text{이 되는 경우의 계수만 찾아.}}$

또, 모든 항의 계수의 총합은 주어진 식의 모든 문자에 1을 대입한 값과 같으므로 $(1-2+1)^3=0$이다.
$\therefore b=0$
$\therefore a^2+b^2=(-6)^2+0=36$

04 답 ②

Tip
x^2-x+1을 보고 떠오르는 곱셈 공식이 있어야 해.
곱셈 공식을 이용하기 위해 필요한 $x+1$은 x^2-x-2를 인수분해해서 만들 수 있어.

$(x^2-x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$
$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$
$=\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)}_{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$
$=\underbrace{(x^3+1)(x^3-8)}_{x^3=10\text{을 대입해.}}=(10+1)(10-8)$
$=11\times2=22$

일등급 UP
* 공통인수를 구할 때는 조건에 주의
$a=3$이면
$f(x)=2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$,
$g(x)=4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$
으로 $f(x)$와 $g(x)$는 일차식인 $2x-1$을 공통인수로 갖는다.
한편, $a=-4$이면
$f(x)=2x^2-4x-2=2(x^2-2x-1)$,
$g(x)=4x^2-8x-4=4(x^2-2x-1)$
이 되어 $f(x)$와 $g(x)$는 이차식인 공통인수를 갖는다.

차 례

07 여러 가지 방정식

08 여러 가지 부등식

Ⅲ 경우의 수

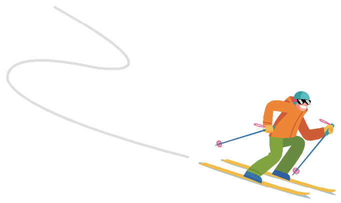
09 순열과 조합

Ⅳ 행렬

10 행렬의 뜻과 연산

일등급 수학 학습계획표 20일

Day	학습 내용	페이지	틀린 문제 / 헷갈리는 문제 번호 적기	학습 날짜	복습 날짜
01	01 다항식의 연산 개념정리+핵심 유형 연습	8-13		월 일	월 일
02	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	14-21		월 일	월 일
03	02 나머지정리 개념정리+핵심 유형 연습	22-27		월 일	월 일
04	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	28-36		월 일	월 일
05	03 인수분해 개념정리+핵심 유형 연습	38-42		월 일	월 일
06	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	43-49		월 일	월 일
07	04 복소수 개념정리+핵심 유형 연습	52-56		월 일	월 일
08	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	57-65		월 일	월 일
09	05 이차방정식 개념정리+핵심 유형 연습	66-70		월 일	월 일
10	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	71-78		월 일	월 일
11	06 이차방정식과 이차함수 개념정리+핵심 유형 연습	80-84		월 일	월 일
12	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	85-93		월 일	월 일
13	07 여러 가지 방정식 개념정리+핵심 유형 연습	94-99		월 일	월 일
14	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	100-107		월 일	월 일
15	08 여러 가지 부등식 개념정리+핵심 유형 연습	108-113		월 일	월 일
16	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	114-120		월 일	월 일
17	09 순열과 조합 개념정리+핵심 유형 연습	122-126		월 일	월 일
18	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	127-134		월 일	월 일
19	10 행렬의 뜻과 연산 개념정리+핵심 유형 연습	136-140		월 일	월 일
20	실전 유형 훈련+고난도 도전 문제	141-150		월 일	월 일



I 다항식

01 다항식의 연산
02 나머지정리
03 인수분해

수학의 눈부신 발전은 자연 현상과
사회 현상을 수식으로 표현하기
시작하면서부터라 해도 과언이
아닙니다.
점점 복잡해지는 수를
대신하여 사용된 문자가
그 대표적인 예일 것입니다.
수를 문자로 표현하면
그 성질들을 쉽게 파악
할 수 있습니다.

01 다항식의 연산

개념 강의 ▶

중요도 ★○○

1 다항식의 정리

두 개 이상의 문자에 대한 다항식은 어떤 문자에 주목하는가에 따라 차수와 동류항, 항의 계수 등이 달라진다.
즉, $x^3-3xy^2+y^2-2$에 대하여 다음과 같다.

문자	차수	동류항	상수항[1]
x에 대한 식	3차	y^2과 -2	y^2-2
y에 대한 식	2차	$-3xy^2$과 y^2, x^3과 -2	x^3-2
x, y에 대한 식	3차	없다.	-2

[1] 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 때, 그 문자를 제외한 다른 문자는 모두 상수로 생각한다.

2 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

교환법칙 : $A+B=B+A$
결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

② 더하는 식은 그대로 더하고, 빼는 식은 각 항의 부호를 바꾸어서 더한 후 동류항끼리 모아서 정리한다.

(2) 다항식의 곱셈

① 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

교환법칙 : $AB=BA$
결합법칙 : $(AB)C=A(BC)$
분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$

② 다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 간단히 한다.

3 곱셈 공식

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$[2]
② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
⑤ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$
⑥ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

[2] $(a-b)^3$
$=\{a+(-b)\}^3$
$=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

FIRST CLASS
핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 다항식의 전개

01 출제율

다항식 $(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)^2$의 전개식에서 x^5의 계수는?

① 28 ② 36 ③ 42
④ 56 ⑤ 72

02 출제율

두 다항식

$$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2,\ (1+2x+3x^2+4x^3)^2$$

의 전개식에서 x^5의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 10 ③ 20
④ 30 ⑤ 40

03 출제율

다항식 $(x-2y+z)^3$의 전개식에서 x^2y의 계수를 a, 모든 항의 계수의 총합을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

핵심유형 02 곱셈 공식

04 출제율

$x^3=10$일 때, 다음 식의 값은?

$$(x^2-x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$$

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

05 출제율

두 다항식 $A=x^3+x+4$, $B=x+4$에 대하여 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 16 ② 32 ③ 48
④ 60 ⑤ 72

06 출제율

다항식 $(a+b-c+d)(a-b+c+d)$의 전개식에서 ab의 계수를 p, 다항식 $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3$의 전개식에서 ab^2의 계수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

FIRST CLASS **실전 유형 훈련**

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 다항식의 전개

21

$x^2+5x-2=0$일 때, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24
④ 36 ⑤ 48

22

두 다항식

$A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$,
$B=(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)^2$

을 전개하였을 때 x^4의 계수를 각각 a, b라 하자. 이때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

23

다항식 $(x+2y-3z)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 총합을 a, y가 없는 항의 계수의 총합을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

핵심유형 02 곱셈 공식

24

양의 실수 x, y가 $(2x+2y-3)^2=89$를 만족시킬 때, $x^2+y^2+2xy-3x-3y$의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

25

두 다항식

$A=2x^3+x^2+x+2$,
$B=x^2+x+2$

에 대하여 A^3-B^3을 전개하였을 때 x^4의 계수를 구하시오.

26

다항식

$f(x)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$

의 전개식이

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{18}x^{18}$

일 때, $a_0+a_6+a_{12}+a_{18}$의 값은?

(단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{18}은 상수)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

54

대각선의 길이가 $\sqrt{5}$인 두 직사각형 P, Q가 있다. P의 가로와 세로의 길이는 각각 a, b이고, Q의 가로와 세로의 길이는 각각 c, d이다. $ad-bc=4$일 때, $ac+bd$의 값은?

① $\sqrt{5}$　② 3　③ $2\sqrt{5}$
④ 5　⑤ 9

55

$a+b+c=3\sqrt{2}$, $a^2+b^2+c^2=6$일 때, ab^2c^3의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.)

56

0이 아닌 실수 x, y, z가

$$x+y+z=3,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

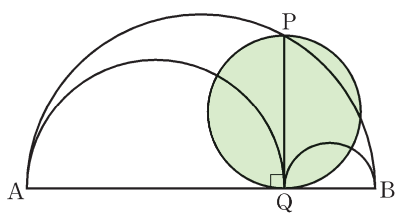
| 보기 |

ㄱ. $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$
ㄴ. $(x+y)(y+z)(z+x)=0$
ㄷ. x, y, z 중 적어도 하나는 3이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57

선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 AQ와 선분 BQ를 지름으로 하는 반원을 각각 그린다. 호 AB, 호 AQ 및 호 BQ로 둘러싸인  모양 도형의 넓이를 S_1, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AQ}-\overline{BQ}=2\sqrt{3}$이고 $S_1+S_2=\frac{\pi}{2}$일 때, $\overline{AQ}^3+\overline{BQ}^3+\overline{PQ}^3$의 값을 구하시오.



06 이차방정식과 이차함수

핵심 유형 연습

문제편 p.82~84

01 답 ⑤

Tip

주어진 조건을 이용하여 아래로 볼록한 함수 $f(x)=a(x-2)(x-b)$의 그래프를 그리고 함숫값을 구해.

$f(x)=a(x-2)(x-b)$에서 $f(0)=2ab=6$이므로

$ab=3$

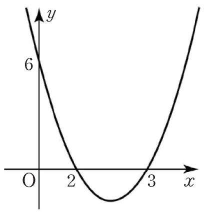
이때, a, b가 자연수이므로

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=1$

(i) $a=1$, $b=3$일 때

$f(x)=(x-2)(x-3)$

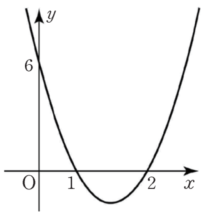
이때, $f(3)=0$이므로 성립하지 않는다.



(ii) $a=3$, $b=1$일 때

$f(x)=3(x-2)(x-1)$

이때, 그림과 같이 $f(3)>0$이므로 성립한다.



(i), (ii)에 의하여

$f(x)=3(x-2)(x-1)$이므로

$f(6)=3\times4\times5=60$

02 답 ①

이차함수 $y=x^2+ax-2a$를 a에 대하여 정리하면

$(x-2)a+x^2-y=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 한 점 P를 지나므로

$x-2=0$, $x^2-y=0$

$\therefore x=2$, $y=4$

즉, $P(2, 4)$

이때, 점 P와 y좌표가 같은 점 Q의 x좌표가 6이므로

$Q(6, 4)$

즉, 함수 $y=x^2+ax-2a$의 그래프의 축은 $x=4$이다.

선분 PQ의 수직이등분선이 축이야.

$y=x^2+ax-2a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2a$에서

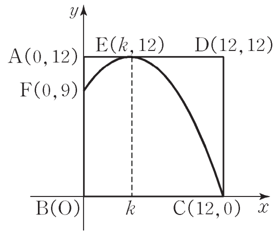
축은 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}=4$

$\therefore a=-8$

03 답 4

정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 x축, y축의 양의 방향으로 나타내면 그림과 같다.



$B(0, 0)$, $C(12, 0)$, $F(0, 9)$, $E(k, 12)$라 하면

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $E(k, 12)$이므로

$y=a(x-k)^2+12$ $(a<0, k>0)$

이때, 점 $F(0, 9)$를 지나므로

$9=a(0-k)^2+12$

$ak^2=-3$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{k^2}$ ⋯ ㉠

또, 이차함수의 그래프가 점 $C(12, 0)$을 지나므로

$0=a(12-k)^2+12$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\underline{0=-\frac{3}{k^2}(12-k)^2+12}$, $(12-k)^2-4k^2=0$

양변에 $-\frac{k^2}{3}$을 곱해.

$-3k^2-24k+144=0$, $k^2+8k-48=0$

$(k+12)(k-4)=0$ $\quad\therefore k=4$ $(\because k>0)$

$\therefore \overline{AE}=k=4$

다른 풀이 : 이차함수 위의 점과 꼭짓점 사이의 $\frac{\Delta y}{(\Delta x)^2}$의 값이 일정함을 이용하기

$\overline{AE}=x$ $(0<x<6)$라 하면

$\overline{ED}=12-x$이고, $\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}^2}=\frac{\overline{DC}}{\overline{ED}^2}$이므로

$\frac{3}{x^2}=\frac{12}{(12-x)^2}$, $3(12-x)^2=12x^2$

$(12-x)^2=4x^2$, $3x^2+24x-144=0$

$x^2+8x-48=0$

$(x-4)(x+12)=0$

$\therefore x=4$ $(\because 0<x<6)$

04 답 ①

Tip

그림에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(x)$의 식을 두 교점의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있어.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하고, 이차함수 $y=f(x)$의 이차항의 계수를 a $(a<0)$라 하면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

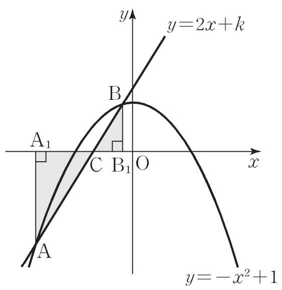
$\overline{QC}=5-\overline{QB}=5-4b$이므로 사다리꼴 PQCR의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\{5a+(5-4b)\}\times3b$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{5\left(1-\frac{5}{4}b\right)+(5-4b)\right\}\times3b\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{3}{2}b\left(10-\frac{41}{4}b\right)\ \left(0<b<\frac{4}{5}\right)$$

따라서 사각형 PQCR의 넓이는 $b=\frac{20}{41}$일 때, 최댓값 $\frac{150}{41}$을 가지므로 $82M=300$

$S=\frac{3}{2}b\left(10-\frac{41}{4}b\right)=-\frac{123}{8}\left(b^2-\frac{40}{41}b\right)$
$=-\frac{123}{8}\left(b-\frac{20}{41}\right)^2+\frac{150}{41}$
이므로 $b=\frac{20}{41}$일 때 최댓값 $\frac{150}{41}$을 가져.

17 답 39



두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $A(\alpha, 2\alpha+k)$, $B(\beta, 2\beta+k)$, $A_1(\alpha, 0)$, $B_1(\beta, 0)$, $C\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$이고,

직선의 방정식에 $y=0$을 대입해서 구해.

α, β는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉 $x^2+2x+k-1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$ ⋯ ㉠

삼각형 ACA_1의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)(-2\alpha-k)=\left(\frac{k}{2}+\alpha\right)^2$$

삼각형의 밑변의 길이와 높이를 구할 때, 큰 값에서 작은 값을 빼야 양수가 돼.

삼각형 BCB_1의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{k}{2}\right)(2\beta+k)=\left(\frac{k}{2}+\beta\right)^2$$

두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로

$$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$$

즉, $2(\alpha^2+\beta^2)+2k(\alpha+\beta)+k^2-3=0$이고,

㉠에 의하여 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-2k+6$이므로

대입하면 $2(-2k+6)+2k(-2)+k^2-3=0$

$k^2-8k+9=0$

$\therefore k=4\pm\sqrt{7}$

이때, $-2<k<2$이므로 $k=4-\sqrt{7}$

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로 $10p+q=39$

실전 유형 훈련

문제편 p.85~91

18 답 10

x축과의 두 교점을 $(-1, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하면 함수 $f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$\frac{-1+\beta}{2}=2\qquad\therefore \beta=5$

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -1, 5이므로

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+1)(x-5)$ ⋯ ㉠

또한, $a+b+c=16$에서 $f(1)=a+b+c=16$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a(1+1)(1-5)=-8a=16$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-5)$이므로

$f(4)=-2\times(4+1)\times(4-5)=-2\times5\times(-1)=10$

19 답 3

두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-(x-1)^2+a$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{3}a\right)$라 하면

$\frac{2}{3}a=\frac{1}{2}t^2$, $\frac{2}{3}a=-(t-1)^2+a$이므로

$a=\frac{3}{4}t^2$ ⋯ ㉠, $a=3(t-1)^2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{4}t^2=3(t-1)^2$이므로

$t^2=4(t-1)^2$

양변에 $\frac{4}{3}$를 곱했어.

$3t^2-8t+4=0$, $(3t-2)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

㉠에 의하여 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

그런데 $a>\frac{1}{2}$이므로 $a=3$

20 답 ④

이차함수 $y=x^2-5x+p$의 그래프가 서로 다른 두 점 $A(a, b)$, $B(b, a)$를 지나므로 각각 대입하자.

$a^2-5a+p=b$, $b^2-5b+p=a$에서 두 식을 변끼리 빼면

$a^2-b^2-5(a-b)=b-a$

$(a-b)(a+b-4)=0$

이때, $a\neq b$이므로 $a+b=4$

$\therefore p=b-a^2+5a=(4-a)-a^2+5a=-a^2+4a+4$
$=-(a-2)^2+8\leq8$

이때, $a=2$이면 $a+b=4$에서 $b=2=a$이므로 $a\neq2$, $p<8$

따라서 정수 p의 최댓값은 $a=1$ 또는 $a=3$일 때,

$p=-1+8=7$이다.

60 답 2

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$1=\frac{1}{3}+2(xy+yz+zx)$, $xy+yz+zx=\frac{1}{3}$

즉, $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ ----- ⓐ

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

x, y, z가 실수이므로 $x=y=z$이고 $x+y+z=1$에서

$x=y=z=\frac{1}{3}$ ----- ⓑ

$\therefore x+2y+3z=6x=2$ ----- ⓒ

다른 풀이 : 한 문자에 대한 내림차순으로 정리하여 이차방정식의 판별식 이용하기

$x+y+z=1$에서 $z=1-x-y$이므로

$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(1-x-y)^2=\frac{1}{3}$

$2x^2+2y^2+1+2xy-2x-2y=\frac{1}{3}$

x에 대한 내림차순으로 정리해 보자.

$2x^2+2(y-1)x+2y^2-2y+\frac{2}{3}=0$ ⋯ ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y-1)^2-2\left(2y^2-2y+\frac{2}{3}\right)=-3y^2+2y-\frac{1}{3}$

$=-3\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)=-3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\geq 0$

에서 $y=\frac{1}{3}$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$2x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}=0$, $2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$에서 $x=\frac{1}{3}$

$x+y+z=1$이므로 $x=y=z=\frac{1}{3}$ (이하 동일)

| 채점기준 |

ⓐ $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$임을 구한다. ----- [60%]
ⓑ x, y, z의 값을 각각 구한다. ----- [30%]
ⓒ $x+2y+3z$의 값을 구한다. ----- [10%]

고난도 도전 문제

문제편 p.106~107

61 답 ③

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 근이 α이므로

$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

ㄱ. $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변에 -1을 곱하면

$-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d=0$

즉, $a(-\alpha)^3-b(-\alpha)^2+c(-\alpha)-d=0$에서

$-\alpha$가 삼차방정식 $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 한 근이므로

방정식 $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 세 근은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이다.

같은 방법으로 $-\beta$, $-\gamma$도 방정식의 근임을 알 수 있어. (참)

ㄴ. $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$에서

$a(\alpha-1+1)^3+b(\alpha-1+1)^2+c(\alpha-1+1)+d=0$

따라서 $\alpha-1$이 삼차방정식

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 한 근이므로

방정식 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 세 근은

$\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$이다. (거짓)

ㄷ. $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$의 양변에 8을 곱하면

$8a\alpha^3+8b\alpha^2+8c\alpha+8d=0$

즉, $a(2\alpha)^3+2b(2\alpha)^2+4c(2\alpha)+8d=0$에서

2α가 삼차방정식 $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$의 한 근이므로

방정식 $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$의 세 근은 2α, 2β, 2γ이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

62 답 ④

$x^3+2x^2+3x+4=x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)+x+3$

$=(x^2+x+1)(x+1)+x+3=0$

이고 α가 방정식의 근이므로

$(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)+\alpha+3=0$

위 식에 $\alpha=-1$을 대입하면 성립하지 않으므로 양변을 $\alpha+1$로

나누면 $\alpha^2+\alpha+1=-\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$ $(\because \alpha\neq-1)$

같은 방법으로 계산하면

$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)$

$=\left(-\frac{\alpha+3}{\alpha+1}\right)\left(-\frac{\beta+3}{\beta+1}\right)\left(-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\right)$

$=-\frac{(\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$

또한, $x^3+2x^2+3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$의

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)=-1+2-3+4=2$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-2$

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)=-27+18-9+4=-14$

$\therefore (\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)=14$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{(\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}=-\frac{14}{-2}=7$

63 답 ①

주어진 사차방정식이 x에 대한 복이차식이므로 방정식의 네 근을

$\pm\alpha$, $\pm\beta$라 할 수 있다.

따라서 $X=x^2$이라 하면 이차방정식 $X^2-3X+k=0$의 두 근은

α^2, β^2이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha^2\beta^2=k$

또한, 두 근의 합이 1이므로 $\alpha+\beta=1$이라 해도 일반성을 잃지 않는다.

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$이므로 $1^2=3+2\alpha\beta$

$\alpha\beta=-1$이므로 $k=(\alpha\beta)^2=1$